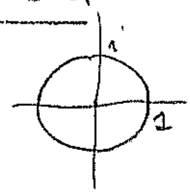
13. Trigonometrische Funktionen

13.1. Motivation: Einheitskreis  in $\mathbb{C}$

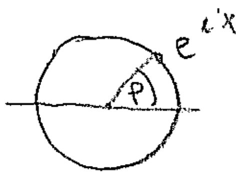
ist gegeben durch

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} = 1 \}$$

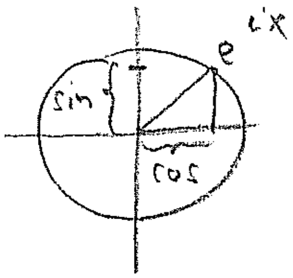
Betrachte $z = e^{ix}$ $(x \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \bar{z} \cdot z = \overline{e^{ix}}\, e^{ix} = e^{\overline{ix}} \cdot e^{ix} = e^{-ix} e^{ix} = e^0 = 1$$

d.h. e^{ix} liegt auf Einheitskreis



da $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$
ist Winkel φ proportional zu x



13.2. Definition: Für $x \in \mathbb{R}$ definiere

$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ Cosinus

$\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$ Sinus

$\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Nach Def. gilt $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

13.3. Satz: cos und sin sind stetige Funktionen

Beweis: klar da exp stetig, und somit auch $\operatorname{Im}\circ\exp$ und $\operatorname{Re}\circ\exp$ stetig $\square$

13.4. Satz: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $\cos(-x) = \cos x$

ii) $\sin(-x) = -\sin x$

iii) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$

iv) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Beweis: i) $\cos(-x) = \operatorname{Re}(e^{-ix})$

$$= \operatorname{Re}(\overline{e^{ix}}) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos x$$

ii) analog

iii) $\cos(x+y) = \operatorname{Re}(e^{i(x+y)}) = \operatorname{Re}(e^{ix} \cdot e^{iy})$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \cdot \operatorname{Re} e^{iy} - \operatorname{Im} e^{ix} \cdot \operatorname{Im} e^{iy}$$

$$= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

iv) analog $\square$

Es gilt: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots$

$$z = ix: \quad e^{ix} = \underset{\operatorname{Re}}{1} + \underset{\operatorname{Im}}{ix} - \underset{\operatorname{Re}}{\frac{x^2}{2!}} - \underset{\operatorname{Im}}{\frac{ix^3}{3!}} + \underset{\operatorname{Re}}{\frac{x^4}{4!}} + \underset{\operatorname{Im}}{i\frac{x^5}{5!}} - \underset{\operatorname{Re}}{\frac{x^6}{6!}} + \ldots$$

Somit haben wir

13.5. Satz: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

13.6. Satz (Abschätzung des Restgliedes):

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x)$$

wobei $|r_{2n+2}(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ falls $|x| \leq 2n+$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x)$$

wobei $|r_{2n+3}(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$ falls $|x| \leq 2n+$

Beweis: $r_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} + \dots$

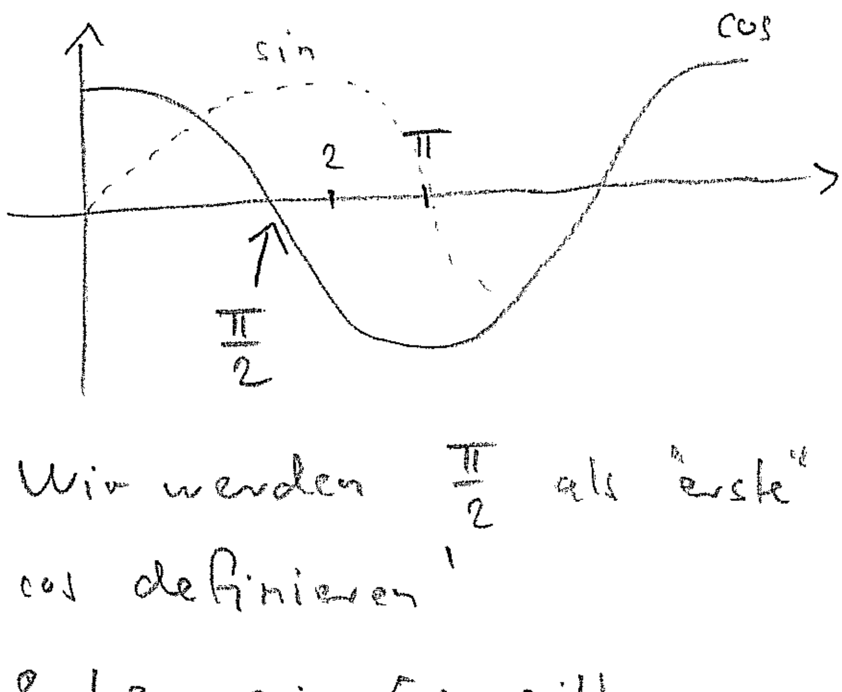
$$= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \underbrace{\left\{ 1 - \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} + \frac{x^4}{(2n+3)\dots(2n+6)} - \dots \right\}}_{\leq 1 \quad \text{falls} \quad |x| \leq 2n+3}$$

d.h.

$$|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

sin analog ☐

13.7. Motivation: cos sollte so aussehen



Wir werden $\frac{\pi}{2}$ als "erste" Nullstelle von cos definieren!

13.8. Lemma: Es gilt:

(a) $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$

(b) $\sin x > 0 \quad \forall x \in (0,2)$

(c) cos ist im $[0,2]$ streng monoton fallend

Beweis: (a) $\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2} + r_4(2)$

und

$$|r_4(2)| \leq \frac{|2|^4}{4!} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

(b) schätze sin in $[0,2]$ analog mit Restglied ab

(c) Betrachte $0 \leq x < x' \leq 2$

Dann

folgt aus 13.4

$$\cos x' - \cos x = \underbrace{-2 \underbrace{\sin\frac{x'+x}{2}}_{>0} \underbrace{\sin\frac{x'-x}{2}}_{>0}}_{<0}$$

$\square$

13.9. Satz: cos hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle. Diese wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

Beweis: cos stetig, $\cos(0) = 1$, $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$

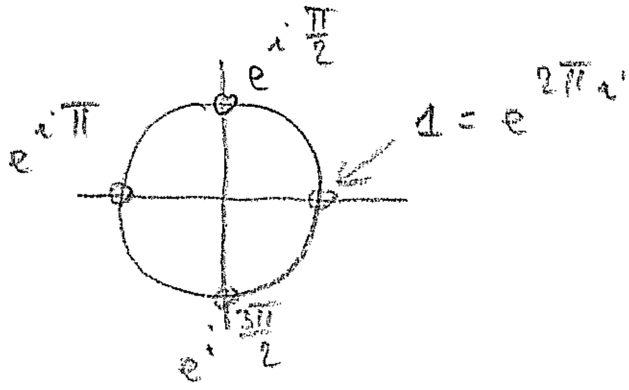
$\xRightarrow[10.1]{\text{ZWS}}$ $\exists$ Nullstelle in $[0,2]$

Da cos streng monoton fallend $\Rightarrow$ Nullstelle eind.

$(x' > x \Rightarrow \cos x' < \cos x)$

13.10 Bemerkungen: Man sieht nun relativ einfach:

(i) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$



(ii) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\cos(x + \pi) = -\cos x$

$\sin(x + \pi) = -\sin x$

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

(iii) Nullstellen sind von der Form

$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

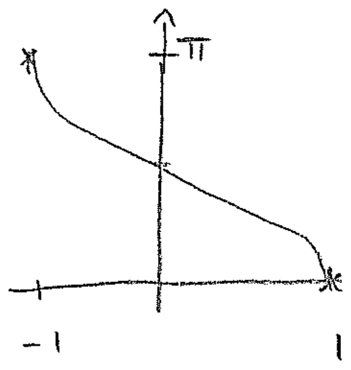
(iv) Für $x \in \mathbb{R}$:

$e^{ix} = 1 \iff x$ ganzzahliges Vielfaches von 2π

(v) cos ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend, stetig

$\Rightarrow \exists$ stetige Umkehrfunktion

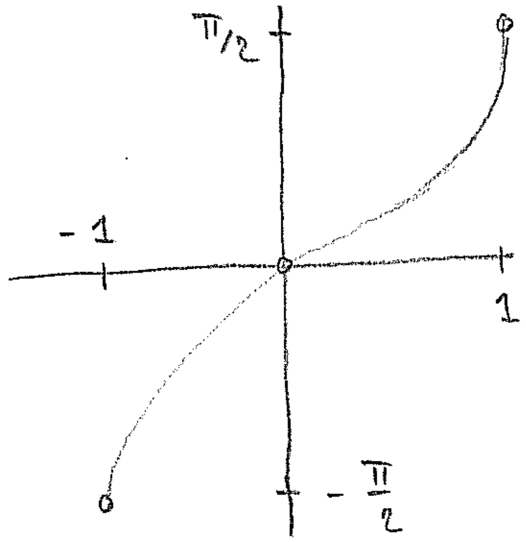
$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$



sin ist auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend, stetig

$\Rightarrow \exists$ stetige Umkehrfunktion

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



13.11. Satz (Polarzerlegung): Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung in der Form

$$z = re^{i\Theta}, \quad r > 0, \quad \Theta \in [0, 2\pi)$$

Beweis: $z \neq 0 \Rightarrow r := |z| \neq 0$

Dann $z = rw$ mit $w = \frac{z}{r}$

also: $|w| = \left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$

Da $x \mapsto e^{ix}$ das Intervall $[0, 2\pi)$ bijektiv auf Einheitskreis $\{w \mid |w| = 1\}$ abbildet

$\Rightarrow \exists$ eind. bestimmtes $\Theta \in [0, 2\pi)$ so dass $w = e^{i\Theta}$, also

$z = re^{i\Theta}$ $\square$

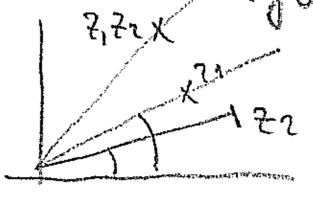
13.12. Bemerkung: Ist

$$z_1 = r_1 e^{i\Theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\Theta_2}$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\Theta_1 + \Theta_2)}$$

also: Multiplikation von komplexen Zahlen

$\hat{=}$ Betragsmultiplikation und Winkeladdition



13.13. Korollar: Sei $n \in \mathbb{N}$.

Es gibt genau n verschiedene Zahlen (die n-ten Einheitswurzeln) $\omega \in \mathbb{C}$, so dass $\omega^n = 1$. Diese sind gegeben durch $\omega_k = e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n}}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$

Beweis: $\omega_k^n = e^{2\pi i \cdot k} = 1^k = 1$

Sei nun $\omega^n = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{|\omega^n|}_{=|\omega|^n} = 1 \Rightarrow |\omega| = 1 \quad (\text{da } |\omega| > 0)$$

$$\Rightarrow \omega = e^{i\Theta}, \quad \Theta \in [0, 2\pi)$$

$$1 = \omega^n = e^{in\Theta}$$

$$\Rightarrow n\Theta = k 2\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{k}{n} 2\pi$$

da $\Theta \in [0, 2\pi) \Rightarrow k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

13.14. Beispiel: $n = 5$ 5-ten Einheitswurzeln