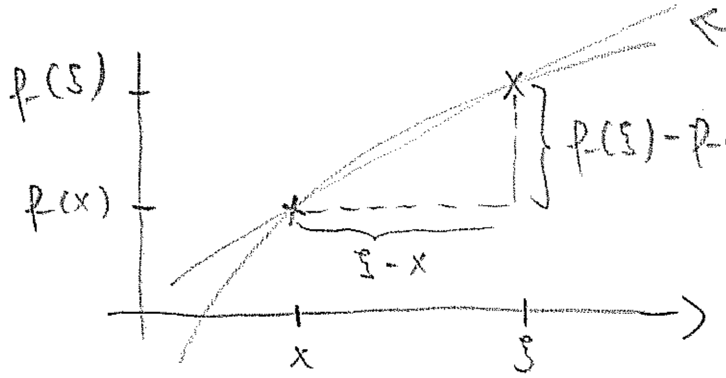
14. Differentiation

14.1. Motivation: Ableitung $f'(x) \hat{=}$

Steigung der Tangente im Punkt $(x, f(x))$ am Graphen von f



Sekante durch $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ hat Steigung $\dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$

Tangente ergibt sich durch Grenzwert $\xi \to x$

Tangente ist gegeben durch Funktion

$y \longmapsto f(x) + f'(x)(y - x)$

Dies ist die beste lineare Approximation der Funktion f in der Nähe vom Punkt x

Geschichte: $\sim$ 1680: Begründung der Infinitesimalrechnung durch Leibniz (Tangentenproblem) und Newton (klassische Mechanik $\to$ Momentangeschwindigkeit, - Beschleunigung)

19. Jahrhundert: heutige rigorose Strenge durch Theorie der Grenzwerte (Cauchy, Weierstraß)

14.2. Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f ist im Punkt $x \in D$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D \setminus \{x\}}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert.

[Wir setzen voraus, dass mindestens eine Folge (ξ_n) in $D \setminus \{x\}$ existiert mit $\xi_n \to x$; typischerweise: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset D$ für ein $\varepsilon > 0$]

Der Grenzwert $f'(x)$ heißt Differentialquotient oder Ableitung von f im Punkt x.

f heißt differenzierbar in D, falls f in jedem Punkt von D diff'bar ist.

Wir schreiben auch

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$$

14.3. Beispiele: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto c$

$$\Rightarrow \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \frac{c - c}{\xi - x} = 0$$

$\Rightarrow$ f diff'bar in x und $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x$

$$\Rightarrow \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \frac{\xi - x}{\xi - x} = 1$$

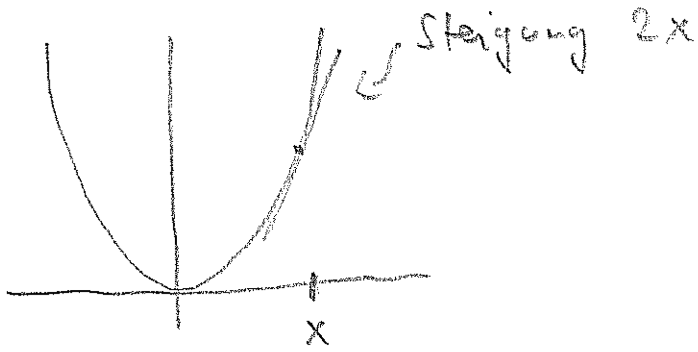
$\Rightarrow$ f diffbar in x und $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^2$

$$\Rightarrow \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = \frac{(\xi - x)(\xi + x)}{\xi - x}$$

$$= \xi + x \xrightarrow{\xi \to x} 2x$$

$\Rightarrow$ f diffbar in x und $f'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$



<u>14.4. Satz:</u> Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ Fkt, $x \in D$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist diff'bar in x.

(ii) Es existiert $c \in \mathbb{R}$ und eine Fkt o auf $\{h \in \mathbb{R} \mid x + h \in D\}$ mit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h \in D \\ h \neq 0}} \frac{\sigma(h)}{h} = 0 \text{ , so dass}$$

$$f(x+h) = f(x) + ch + \sigma(h)$$

$$\forall x \in D$$

(iii) Es existiert eine Fkt η auf D, die in x stetig ist mit

$$f(y) = f(x) + \eta(y)(y-x) \quad , y \in D$$

Wenn diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, so ist $f'(x) = c = \eta(x)$

<u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): Setze

$$\sigma(h) = \left(f(x+h) - f(x)\right) - f'(x)h$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma(h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \xrightarrow{h \to 0} \underbrace{f'(x) - f'(x)}_{=0}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Setze

$$\eta(y) = \begin{cases} f'(x) + \dfrac{\sigma(y-x)}{y-x} & y \neq x \\ f'(x) & y = x \end{cases}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $f(y) = f(x) + \eta(y)(y-x)$

$$\Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y-x} = \eta(y) \xrightarrow{y \to x} \eta(x)$$

$\square$

14.5. Satz: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ diff'bar in $x \in D$. Dann sind

$f+g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$

diff'bar in x mit

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

$$(f g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \quad \text{(Produktregel)}$$

Beweis: $f+g$, λf trivial.

Betrachte $f \cdot g$ $\leadsto$ überprüfe (iii) von 14.4.

$$f(y) \cdot g(y) - f(x) g(x) =$$

$$= f(y) g(y) - f(x) g(y) + f(x) g(y) - f(x) g(x)$$

$$= \underbrace{(f(y) - f(x))}_{(y-x)\,\eta(y)} g(y) + f(x) \underbrace{(g(y) - g(x))}_{(y-x)\,\xi(y)}$$

η, ξ stetig in x

$$= (y-x) \underbrace{\{ \eta(y) g(y) + f(x) \xi(y) \}}_{=: S(y)}$$

wobei S in x stetig ist (als Kombination stetiger Fkt.)

$\Rightarrow$ $f \cdot g$ diff'bar in x und

$$(f g)'(x) = S(x) = \eta(x) g(x) + f(x) \xi(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$ $\square$

14.6. Korollar: (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^n$.

Dann gilt: $f'(x) = n x^{n-1}$

(b) Für eine Polynomfunktion

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

gilt

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

Beweis: (a) mit Induktion nach n

$n = 1$: $\quad x' = 1 \cdot x^0 = 1 \quad$ stimmt nach 14.3.

$n \to n+1$: Gelte $(x^n)' = n x^{n-1}$

Dann gilt nach Produktregel

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x \cdot x^n)' \\ &= x' \cdot (x^n) + x \cdot (x^n)' \\ &= 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} \\ &= (n+1)\, x^n\end{aligned}$$

(b) Folgt aus (a) und Regeln für

$(\lambda f)'$ und $(f+g)'$ $\square$

14.7. Bemerkung: Ist eine Fkt in x diffbar, so ist sie dort auch stetig. Dies folgt z.B. direkt aus Charakterisierung (iii) in 14.4.

14.8. Satz (Kettenregel): Seien $f: E \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(D) \subset E$, g diffbar in $x_0 \in D$, f diffbar in $g(x_0)$. Dann ist die Komposition $f \circ g: D \to \mathbb{R}$ diffbar in x_0 und es gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Beweis: g in x_0 diffbar $\Rightarrow$

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)\, \eta(x)$$

wobei η stetig in x_0, $g'(x_0) = \eta(x_0)$

$y_0 := g(x_0)$

f in y_0 diffbar

$$\Rightarrow f(y) - f(y_0) = (y - y_0)\, \xi(y)$$

wobei ξ stetig in y_0, $f'(y_0) = \xi(y_0)$

also: $f \circ g(x) - f \circ g(x_0) =$

$$= f(g(x)) - f(g(x_0))$$

$$= (g(x) - g(x_0))\, \xi(g(x))$$

$$= (x - x_0) \underbrace{\eta(x) \cdot \xi(g(x))}_{\text{stetig in } x_0}$$

$\Rightarrow f \circ g$ in x_0 diffbar und

$$(f\circ g)'(x_0) = \eta(x_0)\cdot \xi(g(x_0))$$

$$= g'(x_0)\cdot f'(y_0)$$

□

<u>14.9. Korollar</u>: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Fkten mit $g(y) \neq 0 \ \forall y \in D$ und f, g differbar in $x \in D$. Dann ist $\frac{f}{g}$ differbar in x und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x)$ (Quotientenregel)

<u>Beweis</u>: 1) Betrachte $h(x) = \frac{1}{x}$ auf $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow h(x) - h(x_0) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$$

$$= \frac{x_0 - x}{x x_0}$$

$$= (x - x_0)\underbrace{\frac{-1}{x x_0}}_{=:\eta(x)}$$

stetig in x_0

also: $h'(x_0) = \eta(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

2) Betrachte $\frac{1}{g} = h \circ g$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = (h \circ g)'(x_0)$$

$$= h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$$= -\frac{1}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0)$$

3) Betrachte $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$\square$

<u>14.10. Beispiele</u>: exp, sin, cos sind diffbar auf $\mathbb{R}$ und es gilt:

(a) $\exp'(x) = \exp(x)$

(b) $\sin'(x) = \cos(x)$

(c) $\cos'(x) = -\sin(x)$

Beweis: (a) zeige zunächst

$\exp'(0) = \exp(0) = 1$

Nach 7.20 gilt (mit $N = 1$):

$$\left| \exp(x) - (1+x) \right| \leq 2 \cdot \frac{|x|^2}{2!} = |x|^2$$

falls $|x| \leq \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \qquad - \text{"} -$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

d.h. $\exp'(0) = 1$

jetzt allgemein: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig

$$\Rightarrow \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \underbrace{\frac{\exp(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \to 0} 1}$$

d.h. $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$

also: $\exp'(x) = \exp(x)$

(b + c) : Beachte: obige Abschätzung gilt auch für komplexe z, insbesondere für $z = ix$, d.h.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(ix+h) - \exp(ix)}{h} = i \cdot \exp(ix)$$

Nimm Realteil und Imaginärteil davon

$\Rightarrow$ (b), (c) $\square$

(*) 14.10. Bemerkung: $\to$ (*)

<u>14.11. Satz:</u> Seien $f: D \to E$, $g: E \to D$ ($E, D \subset \mathbb{R}$) stetige Funktionen, so dass

$$f \circ g = id_E, \quad g \circ f = id_D$$

(d.h. g ist Umkehrfunktion zu f, $g = f^{-1}$)

Ist f in $x_0 \in D$ diffbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist g in $f(x_0)$ diffbar und es gilt

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (*)$$

[beachte: (*) folgt aus Kettenregel

$$g \circ f = id_E \Rightarrow \underset{\underset{\displaystyle g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}{\shortparallel}}{(g \circ f)'(x_0)} = id'(x_0) = 1$$

Dazu brauchen wir aber, dass g diffbar ist in $f(x_0)$

14.10. Bemerkung: Formal sieht man

$\exp' = \exp$ durch die Reihenentwicklung

$$\exp'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)'$$

$$\overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(x^n)'}{n!}}$$

$$\frac{n\,x^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \exp(x)$$

Allerdings müssen wir dafür die Vertauschung der unendlichen Summation mit der Differentiation rechtfertigen.
Dies ist nicht direkt klar; wir kommen später darauf zurück!

↳ Taylor-Reihen

<u>Beweis:</u> Setze $y_0 := f(x_0)$ d.h. $g(y_0) = x_0$

Dann gilt:

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\,\frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))}$$

$$= y - y_0 \cdot \frac{g(y) - g(y_0)}{(g(y) - g(y_0)) \cdot \eta(g(y))}$$

stetig an Stelle x_0

$$= y - y_0 \cdot \frac{1}{\eta(g(y))}$$

$y \mapsto \eta(g(y))$
stetig bei $y = x_0$
da $g(y_0) = x_0$
und g stetig

Beachte auch: $\eta(g(y)) \neq 0 \quad \forall y$,
da dies nur möglich wäre für $y \neq y_0$ wenn
$g(y) = g(y_0)$
da g bijektiv, kann das nicht sein!
Für $y = y_0$, ist $\eta(g(y_0)) = \eta(x_0) = f'(x_0) \neq 0$
nach Voraussetzung)

also: g bei y_0 diffbar und

$$g'(y_0) = \frac{1}{\eta(g(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$ $\square$

14.12. Beispiel: Der Logarithmus

$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

ist auf $(0,\infty)$ diffbar und es gilt:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

denn: ln ist Umkehrfkt von exp

und $\exp'(x) = \exp(x)$

also: $$\ln'(\exp(x_0)) = \frac{1}{\exp'(x_0)} = \frac{1}{\exp(x_0)}$$

$$\Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,\infty)$$

14.13. Notation: Sei f überall auf $D \subset \mathbb{R}$ diffbar. Dann definiert $x \mapsto f'(x)$ eine neue Fkt auf D, bezeichnet mit f'. Wenn f' wieder diffbar, def. $x \mapsto (f')'$ wieder eine Fkt, bezeichnet mit f''

Durch Induktion kann die k-te Ableitung $f^{(k)}: D \to \mathbb{R}$ definiert werden:

$$f^{(0)} := f$$

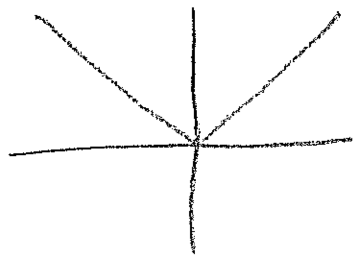
$$f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)' \quad , \text{ falls } f^{(k-1)} \text{ diffbar}$$

Beispiel: $\exp^{(n)}(x) = \exp(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>14.14. Beispiel:</u> Die Betragsfkt

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x|$$

ist in 0 stetig, aber nicht diffbar.



denn: $$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{für } h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|0+h| - |0|}{h} \text{ existiert nicht.}$$