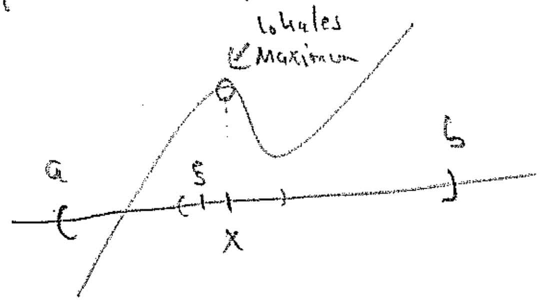
15. Lokale Extrema und Mittelwertsatz

15.1. Definition: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ Fkt.

f hat in $x \in (a,b)$ ein <u>lokales Maximum</u> (bzw. Minimum), wenn $\exists\ \varepsilon > 0$, so dass

$$f(x) \geq f(\xi) \qquad \forall\ \xi \in (a,b),\ |\xi - x| < \varepsilon$$



15.2. Satz: Wenn f in x ein lokales Maximum oder Minimum besitzt, und f in x diffbar ist, so ist $f'(x) = 0$

Beweis: für Maximum:

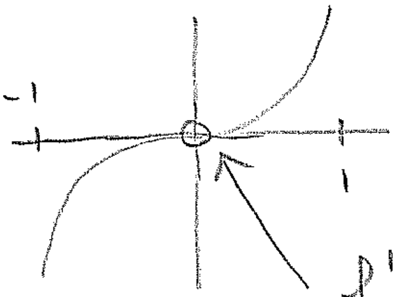
$$f'(x) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \neq x}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{\xi \to x \\ \xi < x}} \underbrace{\dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}}_{\geq 0\ \forall\ \xi < x} \geq 0 \\[3em] \lim\limits_{\substack{\xi \to x \\ \xi > x}} \underbrace{\dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}}_{\leq 0\ \forall\ \xi > x} \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = 0$$

15.2 Bemerkung: 1) Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend für lokales Extremum

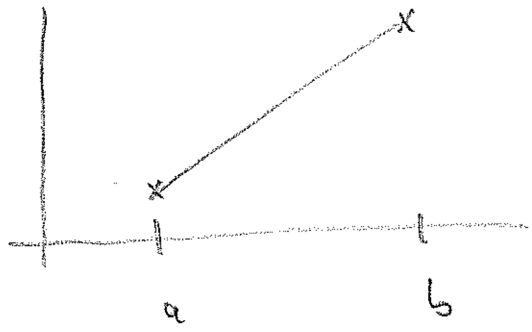
Bsp: $f(x) = x^3$ auf $(-1, 1)$



$f'(0) = 0$
aber kein lokales Extremum

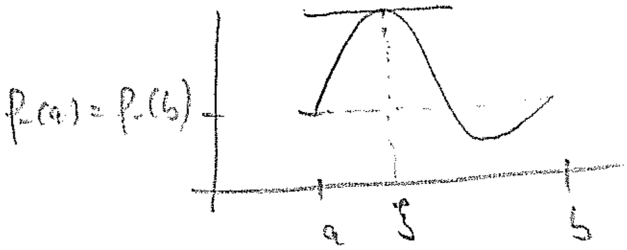
2) Satz gilt nicht für lokales Extremum am Rand

lokales Maximum auf $[a,b]$,
aber $f'(b) \neq 0$



15.3. Satz von Rolle: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Fkt, $f(a) = f(b)$, f diffbar auf (a,b). Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$



Beweis: 1. Fall: f konstant $\Rightarrow f'(\xi) = 0$
$\forall\, \xi \in (a,b)$

2. Fall: f nicht konstant, d. h.

$\exists\, y \in (a,b) : f(y) > f(a) = f(b)$ oder
$<$

Behandle "$>$"
$10.4 \Rightarrow f$ nimmt Maximum in $\xi \in [a,b]$ an

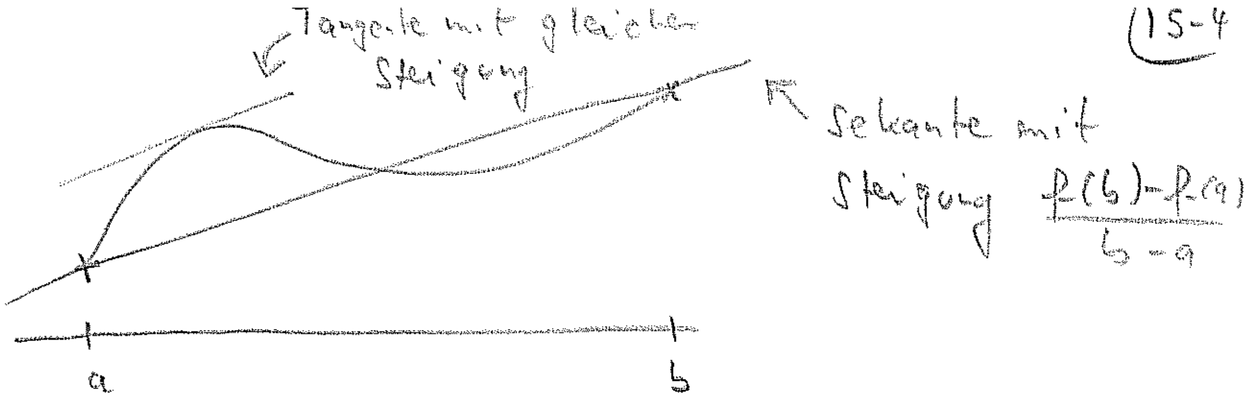
Da $f(\xi) \geq f(y) > f(a) = f(b)$

d. h. $\xi \in (a,b)$

$\overset{15.2}{\Longrightarrow} f'(\xi) = 0$ $\square$

15.4. Mittelwertsatz: Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf (a,b). Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



<u>Beweis:</u> Für $f(a) = f(b)$ ist dies Satz von Rolle. Reduziere allgemeinen Fall darauf.

betrachte: $g(x) = f(x) - m(x-a)$

$$\text{wobei } m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

dann: g stetig in $[a,b]$, diffbar in (a,b)

$g(a) = f(a)$

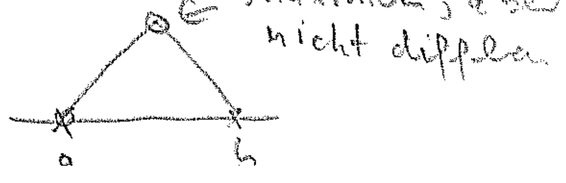
$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b-a = f(a)$

$\underset{\text{Rolle}}{\overset{15.3}{\Longrightarrow}} \exists\, \xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$

d.h. $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - m$

$\Rightarrow f'(\xi) = m$

<u>15.5. Bemerkung:</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Kandidaten für Extremstellen (global!) von f sind:
(i) Punkte ξ in (a,b), wo f diffbar und $f'(\xi) = 0$
(ii) Ränder $\xi = a$ oder $\xi = b$
(iii) ξ wo f nicht diffbar



15.6. Satz (Monotoniekriterium): Sei

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ; diffbar in (a,b)

Falls $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist str. mon. wachsend in $[a,b]$

< 0 str. mon. fallend

≥ 0 monoton wachsend

≤ 0 monoton fallend

<u>Beweis</u>: Sei $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Betrachte $x, y \in [a,b]$, $x < y$

Mittelwertsatz 15.4 $\Rightarrow \exists\, \xi \in (x,y)$

$$\underbrace{f'(\xi)}_{>0} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \Rightarrow \quad f(y) - f(x) > 0$$

d.h. $f(y) > f(x)$

andere Fälle analog $\square$

15.7. <u>Bemerkung</u>: Es gilt auch die Umkehrung

monoton wachsend auf (a,b) $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

aber im allgemeinen: streng monoton wachsend $\not\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Beispiel: $f(x) = x^3$ ist streng monoton, aber $f'(0) = 0$

15.8. Beispiel: Verhalten von $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$

Was ist $f'(x)$?

$f(x) = x^{1/x} = \exp(\frac{1}{x} \ln x)$ nach Def. 11.6

$$\Rightarrow f'(x) = \exp(\tfrac{1}{x} \cdot \ln x) \cdot \left\{ -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right\}$$

$$= \underbrace{\exp(\tfrac{1}{x} \cdot \ln x)}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} \underbrace{(1 - \ln x)}_{\text{monoton fallend}}$$

$(1 - \ln x)' = -\frac{1}{x} < 0$

$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

also:

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & x > e \\ = 0 & x = e \\ > 0 & 0 < x < e \end{cases}$$

insbesondere: f streng monoton fallend für $x > e$

Insbesondere ist Folge $(\sqrt[n]{n}) = n^{1/n}$ streng monoton fallend ab $n > e$, d.h. $n \geq 3$

Da $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (nach 5.18)

folgt dann auch $\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = 1$

15.9. Satz: Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differbar (d.h. f'' existiert, f'' stetig)

Ist $f'(x_0)=0$ für $x_0 \in (a,b)$, so hat f in x_0

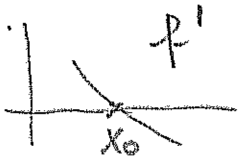
(a) lokales Max, falls $f''(x_0) < 0$

(b) lokales Min, falls $f''(x_0) > 0$

[Falls $f''(x_0) = 0$ so ist keine Aussage möglich, man muß höhere Ableitungen betrachten.]

Beweis: (a)
$$\left.\begin{array}{l} f'' \text{ stetig} \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \text{ so dass } f''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a,b)$$

Daher ist f' streng monoton fallend auf $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ (nach 15.6) und $f'(x_0)=0$



d.h. $f' > 0$ auf $(x_0-\varepsilon, x_0)$

$f' < 0$ auf $(x_0, x_0+\varepsilon)$

d.h. f streng monoton wachsend auf $(x_0-\varepsilon, x_0)$
(15.6) fallend $(x_0, x_0+\varepsilon)$

$\Rightarrow f$ hat lokales Max in x_0

<u>15.10. Satz:</u> Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar.

Falls $f' \equiv 0$ auf (a,b), so ist f konstant.

<u>Beweis:</u> Betrachte $x, y \in (a,b)$, $x < y$

Mittelwertsatz $\Rightarrow \exists \xi \in (x,y)$:

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0} (y-x) = 0$$

$\Rightarrow f(y) = f(x)$ $\square$

<u>15.11. Satz:</u> Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar

mit $f'(x) = a f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dann existiert $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = C e^{ax} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>Beweis:</u> Setze $g(x) := f(x) e^{-ax}$. Dann gilt

$$g'(x) = \underbrace{f'(x)}_{a f(x)} \cdot e^{-ax} + f(x)\left(-a e^{-ax}\right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\overset{15.10}{\Longrightarrow}$ g konstant, d.h. $\exists C \in \mathbb{R} : g(x) = C \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x) = C \cdot e^{ax}$$

— " —

$\square$

15.12. Satz (Regeln von l'Hospital):

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar und sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$. In jeder der beiden Situationen

(a) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ für $x \searrow a$

(b) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \searrow a$

gilt: Falls $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Entsprechendes gilt für Grenzwerte

$x \nearrow b$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$

<u>Beweis</u>: (a) Setze f, g zu stetigen Fkten auf $[a,b)$ fort durch $f(a) = g(a) = 0$

beachte: wegen $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ ist $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ (sonst Widsp zu Satz von Rolle)

Für festes $x \in (a,b)$ setze

$$F(t) := f(t) - f(x) \frac{g(t)}{g(x)} \qquad t \in [a,b)$$

dann: F stetig in $[a,x]$, diffbar auf (a,x) und

$$F(a) = \underbrace{f(a)}_{=0} - f(x) \frac{\overbrace{g(a)}^{=0}}{g(x)} = 0$$

$$F(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Rolle $\Longrightarrow$ $\exists\ \xi_x \in (a, x)$ mit

$$0 = F'(\xi_x) = f'(\xi_x) - \frac{f(x)}{g(x)}\, g'(\xi_x)$$

d.h. $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Sei nun (x_n) Folge mit $x_n \searrow a$. Da $a < \xi_{x_n} < x_n$,

folgt dann $\xi_{x_n} \searrow a$

Somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_{x_n})}{g'(\xi_{x_n})} = \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\Rightarrow$ Beh.

(b) ähnlich

betrachte noch Fall $x \to \infty$: führe auf

Fall $x \searrow 0$ zurück

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\searrow 0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}$$

$$= \lim_{y\searrow 0} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot \cancel{(-\frac{1}{y^2})}}{g'(\frac{1}{y}) \cdot \cancel{(-\frac{1}{y^2})}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

15.13. Beispiele: 1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-e^{2x}} = \,?$

$\sin 0 = 0 = 1 - e^{2\cdot 0}$

$\sin' x = \cos x$

$(1-e^{2x})' = -2e^{2x} \neq 0$ auf $(0,b)$ für $b>0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{-2e^{2x}} = \frac{1}{-2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \,?$ $(\alpha > 0$ beliebig$)$

(vgl. 11.8)

$\left.\begin{matrix}\ln x \\ x^\alpha\end{matrix}\right\} \to \infty$ für $x \to 0$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \neq 0$ auf $(0,\infty)$

also: $\frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha x^\alpha} \longrightarrow 0$ für $x\to\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$