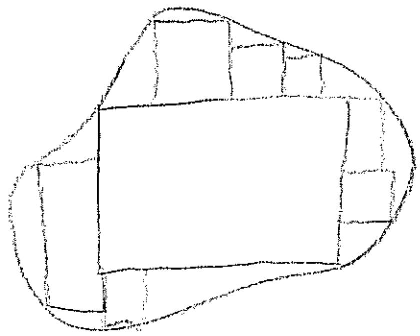
# 16. Integration

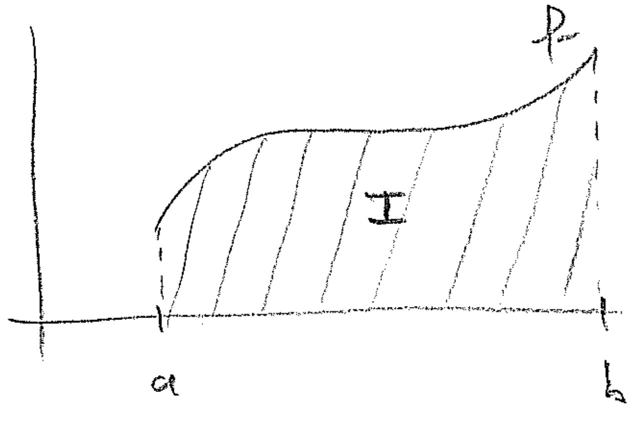
## 16.1. Motivation: Berechnung von Flächeninhalten von allgemeinen Flächen



Idee: Approximiere durch "einfache" Flächen und nimm Grenzwert

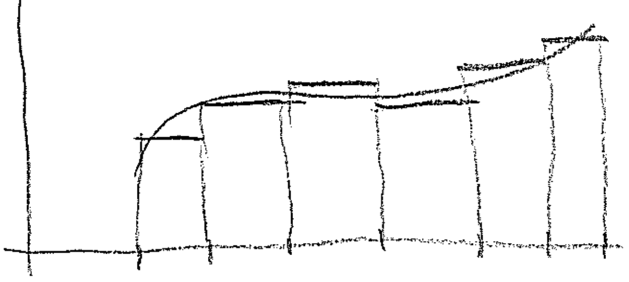
Spezialfälle seit Antike (z.B. Archimedes ~ 250 v.Ch.), systematische Theorie aber erst mit Leibniz/Newton ~ 1680

Betrachte Fläche unter Graph einer Fkt $f$




Bezeichnung:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

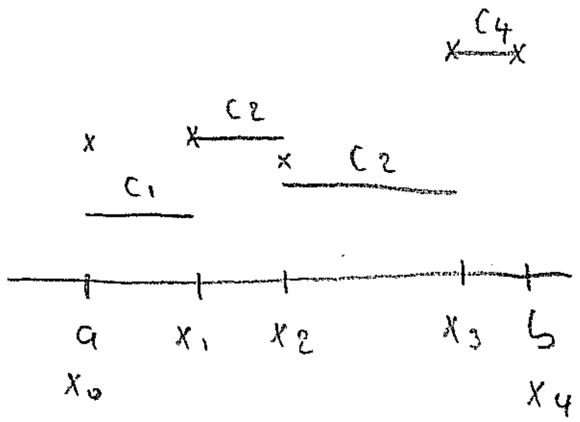


Approximation von $I$ durch Rechtecke $\hat{=}$ Approximation von $f$ durch "Treppenfunktionen"

**16.2. Definition:** Eine Fkt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine Unterteilung $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = c_i \quad \text{für } x \in (x_{i-1}, x_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

(Werte von $f$ in $x_i$ sind nicht vorgeschrieben)




Setze

$$I(T) := \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$

**16.3 Satz:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Treppenfkt bzgl. zwei verschiedenen Unterteilungen $T = \{x_0, \dots, x_n\}$ und $S = \{y_0, \dots, y_m\}$

mit $f(x) = c_i$ auf $(x_{i-1}, x_i)$

$f(x) = d_j$ auf $(y_{j-1}, y_j)$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m} d_j (y_j - y_{j-1})$$

<u>Beweis</u>: Seien $I(T)$ und $I(S)$ die beiden Summen. Dann gilt

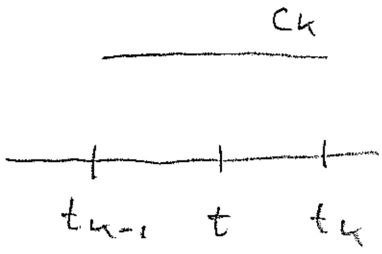
$$I(T) = I(\underbrace{S \cup T}_{\text{Unterteilung mit allen Punkten } x_0,..,x_n,y_0,..,y_m}) = I(S)$$

Dies folgt aus $I(T) = I(\tilde{T})$

falls $T \subset \tilde{T}$

Induktiv reicht es den Fall zu betrachten

$\tilde{T} = T \cup \{t\}$



also

$T = \{t_0,..,t_n\}$

$\tilde{T} = \{t_0,..,t_{k-1}, t, t_k,..,t_n\}$

$$\Rightarrow I(\tilde{T}) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} c_i(t_i - t_{i-1}) + \underbrace{c_k(t - t_{k-1}) + c_k(t_k - t)}_{c_k(t_k - t_{k-1})}$$

$$= I(T)$$

$\square$

16.4. Definition: Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfkt. Wir setzen

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx := I(T) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$

für irgendeine Unterteilung $T$ von $[a,b]$, bzgl. welcher $\varphi$ Treppenfkt ist.

(Nach 16.3. hängt dies nicht von Wahl von $T$ ab.)

Wir schreiben auch (falls $a,b$ klar sind)

$$\int \varphi = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

16.5. Satz: Seien $\varphi, \psi$ Treppenfkten auf $[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\alpha\varphi + \beta\psi$ und $|\varphi|$ Treppenfkten und es gilt:

(a) $\int(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int \varphi + \beta \int \psi$

(b) $\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi|$

(c) $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$

bedeutet: $\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$

Insbesondere: {Treppenfkten auf $[a,b]$}

ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und die

Abbildung

$$\int : \{\text{Treppenfkten}\} \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto \int \varphi$$

ist linear.

<u>Beweis</u>: Sei $\varphi$ Treppenfkt bzgl. $S$,

$\psi$ Treppenfkt bzgl $T$

$\Rightarrow \alpha\varphi + \beta\psi$ Treppenfkt bzgl. $S \cup T$

Aussagen (a) - (c) sind Aussagen über endliche Summen

(a) $\alpha \sum a_i + \beta \sum b_i = \sum (\alpha_i a_i + \beta b_i)$

(b) $|\sum a_i| \leq \sum |a_i|$

(c) $\underset{\forall i}{a_i \leq b_i} \Rightarrow \sum a_i \leq \sum b_i$ $\square$

<u>16.6 Def.</u>: Sei $X$ Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkte Fkt. Wir definieren

$$\|f\| := \sup \{ |f(x)| \mid x \in X \} \in [0, \infty)$$

$\|f\|$ heißt <u>Supremumsnorm</u> von $f$.

**16.7. Bemerkung:** 1) Es ist leicht zu sehen, dass $\|\cdot\|$ wirklich eine Norm ist, d.h. dass gilt:

(i) $\|f\| \geq 0 \quad \forall f$ und

$$\|f\| = 0 \iff f \equiv 0$$

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\| \quad \forall f \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iii) Dreiecksungleichung

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \qquad \forall f, g$$

Wir sagen: $\{f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt$\}$ versehen mit $\|\cdot\|$ ist ein <u>normierter Vektorraum</u>

Insbesondere gibt $\|f-g\|$ einen sinnvollen "Abstand" zwischen den Fkten $f$ und $g$

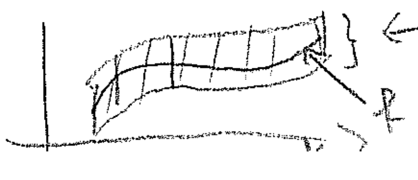
2) Außerdem gilt auch

$$\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

3) $\|f-g\| \leq \varepsilon$ heißt explizit:

$\sup\{|f(x)-g(x)| \; x \in X\} \leq \varepsilon$, d.h.

$|f(x)-g(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X$



← g liegt in dieser "$\varepsilon$-Umgebung" von $f$

<u>16.8. Satz:</u> Für jede Treppenfkt auf $[a,b]$ gilt:

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| \leq \|\varphi\| \cdot (b-a)$$

<u>Beweis:</u>

$$\left|\int \varphi\right| = \sum c_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0}$$

$$\leq \sum \underbrace{|c_i|}_{\leq \|\varphi\| \ \forall i} (x_i - x_{i-1})$$

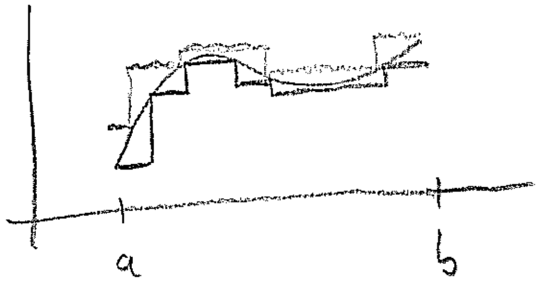
$$\leq \|\varphi\| \cdot \underbrace{\sum_i (x_i - x_{i-1})}_{x_n - x_0 = b-a}$$

$$= \|\varphi\| \cdot (b-a)$$ □

<u>16.9. Satz:</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann existieren Treppenfkten $\varphi, \psi$ auf $[a,b]$, so dass $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$.

(Insbesondere ist dann auch $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ und $\|f - \psi\| < \varepsilon$.)

Beweis:




$f$ stetig auf $[a,b] \overset{10.9}{\Longrightarrow} f$ glm. stetig

d.h. $\exists\, \delta > 0 \;\; \forall x, y \in [a,b]$ :

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Sei $a = x_0 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung

mit $|x_i - x_{i-1}| < \delta \quad \forall i$

Setze $m_i :=$ Minimum von $f$ auf $[x_{i-1}, x_i]$

$M_i :=$ Maximum —— " ——

Definiere

$\varphi$ durch $\varphi(x) = m_i \quad x \in (x_{i-1}, x_i]$

$\varphi(a) = m_1$

$\psi$ durch $\psi(x) = M_i$ —— " ——

$\psi(a) = M_1$

Dann gilt für jedes Intervall $x \in (x_{i-1}, x_i]$:

$$\varphi(x) = m_i \leq f(x) \leq M_i = \psi(x);$$

ebenso für $x = a$; d.h.

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

also $\varphi \leq f \leq \psi$

Außerdem gilt für $x \in (x_{i-1}, x_i]$:

$$|\psi(x) - \varphi(x)| = |M_i - m_i| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}(\text{da } M_i &= f(\xi_i) \\ m_i &= f(\eta_i) \\ \text{mit } \xi_i, \eta_i &\in [x_{i-1}, x_i], \text{ d.h.} \\ |\xi_i - \eta_i| &< \delta \quad )\end{aligned}$$

Somit: $\|\psi - \varphi\| = \max\{M_i - m_i \mid i = 1,..,n\}$

$$< \varepsilon \qquad \square$$

<u>16.10. Definition:</u> Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Regelfunktion</u>, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfkt $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

<u>16.11. Bemerkungen:</u> 1) Nach 16.9. ist jede stetige Fkt auf $[a,b]$ Regelfkt

2) Seien $f, g$ Regelfkten, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $\alpha f$, $f+g$, $f \cdot g$ Regelfkten.

[Beweis: i) Sei $\varepsilon > 0$ und $\varphi, \psi$ Treppenfkten

$$\left.\begin{aligned}\text{mit } \|f - \varphi\| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \|g - \psi\| &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&\|f + g - (\varphi + \psi)\| \\ &\leq \|f - \varphi\| + \|g - \psi\| < \varepsilon\end{aligned}$$

und $\varphi + \psi$ Treppenfkt

ii) $\|f \cdot g - \varphi\psi\| = \|(f-\varphi)\cdot g + \varphi(g-\psi)\|$

$$\leq \underbrace{\|f-\varphi\|}_{\substack{\text{wähle } \varphi \text{ s.d.} \\ \|..\| < \frac{\varepsilon}{2\|g\|}}} \cdot \|g\| + \|\varphi\| \cdot \underbrace{\|g-\psi\|}_{\substack{\text{wähle dann } \psi \text{ so dass} \\ \|..\| < \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|}}}$$

(falls $\|\varphi\| = 0$ : trivial)

$< \varepsilon$

3) Nach (2) ist Produkt von stetiger Fkt mit Treppenfkt eine Regelfkt. D.h. stückweise stetige Fkten sind auch Regelfkten

4) Jede monotone Fkt ist eine Regelfkt.

Beweis: Übung !(?)

5) ⊛

16.12 Satz: Sei $f$ Regelfkt auf $[a,b]$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Treppenfkten auf $[a,b]$ mit $\|f-\varphi_n\| \to 0$. (Solche Folge existiert nach Def einer Regelfkt.) Dann ist die Folge $(\int \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen und damit konvergent. Der Grenzwert dieser Folge hängt nicht von der Wahl der $\varphi_n$ ab.

(*) 5) Beachte auch: Jede Regelfkt $f$ ist beschränkt, d.h. $\|f\| < \infty$ 

denn: $\exists$ Treppenfkt $\varphi$ mit $\|f-\varphi\| < 1$

und Treppenfkt beschränkt, d.h. $\|\varphi\| < \infty$

$$\Rightarrow \|f\| = \|f - \varphi + \varphi\|$$

$$\leq \underbrace{\|f-\varphi\|}_{<1} + \underbrace{\|\varphi\|}_{<\infty}$$

$$< \infty$$

Dann gilt:

$$\|\tilde{\varphi}_n - \varphi_n\| \leq \|\tilde{\varphi}_n - f\| + \|f - \varphi_n\| \to 0$$

und somit

$$\left|\int \tilde{\varphi}_n - \int \varphi_n\right| = \left|\int (\tilde{\varphi}_n - \varphi_n)\right|$$

$$\leq \|\tilde{\varphi}_n - \varphi_n\| \cdot (b-a)$$

$$\to 0$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \int \tilde{\varphi}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi_n$ $\square$

<u>16.13. Definition</u>: Sei $f$ Regelfkt auf $[a,b]$. Wir definieren $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ als den Grenzwert der Folge

$$\left(\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

wo $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfkten ist, so dass $\|f - \varphi_n\| \to 0$.

<u>16.14. Satz</u>: Seien $f, g$ Regelfkten auf $[a,b]$. Dann gilt:

(a) für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ Regelfkt und

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

(b) $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$

(c) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \|f\| (b-a)$

(d) Sei $f$ Regelfkt auf $[a, b+c]$

$(a < b,\ c > 0)$

Dann sind $f$ eingeschränkt auf $[a,b]$ und $f$ eingeschränkt auf $[b, b+c]$ auch Regelfkten und es gilt:

$$\int_a^{b+c} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+c} f(x)\,dx$$

<u>Beweis:</u> (a) Seien $\varphi_n, \psi_n$ Folgen von Treppenfkten mit

$\|f - \varphi_n\| \to 0$ und $\|g - \psi_n\| \to 0$

Dann ist $\alpha\varphi_n + \beta\psi_n$ Treppenfkt für $n \in \mathbb{N}$ und

$\|\alpha f + \beta g - (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)\| \to 0$

d.h. $\alpha f + \beta g$ ist Regelfkt

Außerdem

$$\begin{array}{ccc} \int (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) & = & \alpha\int\varphi_n + \beta\int\psi_n \quad \forall n \\ \downarrow & & \downarrow \quad n \to \infty \\ \int(\alpha f + \beta g) & & \alpha\int\varphi + \beta\int\psi \end{array}$$

(b) Da $f \leq g \iff g - f \geq 0$

reicht es zu zeigen

$$g \geq 0 \implies \int g \geq 0$$

Sei also $g \geq 0$: Wähle nach 16.9.

Folge $(\varphi_n)$ von Treppenfktn mit $g \leq \varphi_n$ und

$\| g - \varphi_n \| \to 0$ — gilt nur für stetige $g$ $\vdots$ → modifizieren $\varphi_n$ durch $\varphi_n^+$

Da $\varphi_n \geq g \geq 0$

$$\overset{16.5}{\implies} \int \varphi_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$\int g \qquad \implies \int g \geq 0$$

(c), (d) analog $\square$

16.15 Bemerkung: Insbesondere haben wir:

{Regelfktn} ist normierter Vektorraum und

die Abbildung

$$\int : \{\text{Regelfktn}\} \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

ist linear.

(c) bedeutet, dass diese Abbildung auch "stetig" ist, d.h. $\| f_n - f \| \to 0 \implies \int f_n \to \int f$

Außerdem sind die Regelfkten unter dieser Konvergenz "abgeschlossen", d.h. falls $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Fkt ist so dass es eine Folge $(f_n)$ von Regelfkten gibt mit

$$\|f-f_n\|\to 0,$$

so ist $f$ auch schon eine Regelfkt.

$\rightsquigarrow$ Übung!

<u>16.16. Satz:</u> Sei $I$ ein Intervall (offen, abgeschlossen, $(-\infty,+\infty)$, ..), $f: I\to\mathbb{R}$ stetig, $a\in I$. Für $x\in I$ definiere

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

[wobei wir für $x<a$ festsetzen:

$$\int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt \quad ]$$

Dann ist $F$ auf $I$ diffbar und es gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

<u>Beweis:</u> $F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Sei $\varepsilon > 0$ ; wähle $\delta > 0$ so dass

$$|t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

(möglich wegen Stetigkeit von $f$ in $x$)

Dann gilt für $|h| < \delta$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \underset{\uparrow \text{ konstant in } t}{f(x)}\, dt \right|$$

$$= \frac{1}{h} \underbrace{\left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt \right|}_{\leq h \cdot \sup\{|f(t) - f(x)| \mid x \leq t \leq x+h\}}$$

$$< h \cdot \varepsilon$$

$$< \varepsilon$$

d.h. $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \to 0$ für $h \to 0$

d.h. $F'(x) = f(x)$ $\square$

Sei $I$ Intervall.

**16.17. Def.:** Eine differenzierbare Funktion

$F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu

$f : I \to \mathbb{R}$, falls

$F'(x) = f(x)$ auf $I$

**16.18. Satz:** Sei $F$ Stammfkt zu $f$ auf Intervall $I$. Eine Fkt $G : I \to \mathbb{R}$ ist Stammfkt zu $f$ genau dann, wenn $G - F$ konstant ist.

Beweis: "$\Leftarrow$": $G = F + c$, $c$ konstante Fkt

$\Rightarrow G' = F' + c' = F' = f$

"$\Rightarrow$": Seien $a, b \in I$, $a < b$

Dann $G - F$ auf $[a,b]$ diffbar und

$(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$

$\overset{15.10}{\Longrightarrow} G - F$ konstant auf $[a,b]$

d.h. $(G-F)(a) = (G-F)(b)$

also: $G - F$ auf $I$ konstant

$\square$

# 16.19. Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F$ Stammfunktion zu $f$.

Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Außerdem ist für jedes $a \in I$ die Fkt

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Stammfkt zu $f$.

Beweis: Nach 16.16 ist $F_a' = f$.

Sei $F$ irgendeine Stammfkt zu $f$.

Nach 16.18 ist $F = F_a + C_1$

Da $F_a(a) = 0$, ist

$$F(a) = F_a(a) + C_1 = C_1,$$

also:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_a(b) = F(b) - C_1 = F(b) - F(a)$$

16.20. Bezeichnung: Wir schreiben

(ii) $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

damit ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

(i) $F = \int f(x)\,dx$ für Stammfkt

(beachte: nur bis auf Konstante bestimmt)

"unbestimmtes Integral"

16.21. Beispiele: Wir kennen die folgenden Ableitungen:

| | $f$ | $f'$ |
|---|---|---|
| | $x^n$ | $n\,x^{n-1}$ |
| $x>0$ | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| | $\sin x$ | $\cos x$ |
| | $e^x$ | $e^x$ |
| | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |

Damit haben wir z.B. folgende Integrale:

1) $$\int_a^b t^n \, dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} \left( b^{n+1} - a^{n+1} \right)$$

$(n \in \mathbb{N}_0)$

2) Für $0 < a < b$:

$$\int_a^b \frac{1}{t} \, dt = \ln t \Big|_a^b = \ln b - \ln a$$

3) Für $a < b < 0$ : $\int_a^b \frac{1}{t} \, dt = ?$

beachte: $x < 0$

$$\Rightarrow \ln(-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{t} \, dt = \ln(-t) \Big|_a^b$$

$$= \ln(-b) - \ln(-a)$$

4) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x$$

d.h.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x \Big|_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

**16.22. Satz (Substitutionsregel):** Sei

$f : I \to \mathbb{R}$ stetig $I$ Intervall und

$\varphi : [a,b] \to I$ stetig diffbar.

Dann gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Beweis: Sei $F$ Stammfkt zu $f$, d.h. $F' = f$

Dann gilt nach Kettenregel:

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$$

d.h. $F \circ \varphi$ ist Stammfkt zu $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$,

d.h. [beachte: nach Voraussetz. ist $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ stetig]

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F \circ \varphi \Big|_a^b$$

$$= F \circ \varphi\,(b) - F \circ \varphi(a)$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

$\square$

## 16.23. Beispiele:

1) $$\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t)\,dt$$

dabei: $\varphi(t) = t + c$, $\varphi'(t) = 1$

2) $$\int_a^b \underbrace{\cos t}_{\varphi'(t)} \cdot \underbrace{e^{\sin t}}_{e^{\varphi(t)}}\,dt = ?$$

Setze $\varphi(t) = \sin t$

$$= \int_a^b \varphi'(t)\, e^{\varphi(t)}\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} e^u\,du$$

$$= e^u \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

$$= e^{\sin b} - e^{\sin a}$$

## 16.24. Satz (partielle Integration):

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbare Fkten (d.h. diffbar und Ableitungen stetig)

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$$

Beweis: $fg$ ist Stammfkt zu $f'g + fg'$ $\square$

## 16.25 Beispiel: $\int \ln x \, dx = \, ?$

$$\int \ln x \, dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{\ln x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{1} \, dx$$

$f$, $g'$, d.h. $g = x$

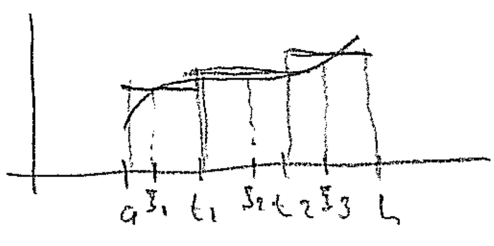
$$= x \cdot \ln x - \underbrace{\int \frac{1}{x} \cdot x}_{x}$$

$$= x \cdot \ln x - x$$

## 16.26 Satz (Riemannsche Summen):

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. Dann gilt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ von $[a,b]$ mit $\max\limits_{n=1,\ldots,n} |t_i - t_{i-1}| < \delta$ und für alle $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \right| < \varepsilon$$



Beweis: vgl. Beweis zu 16.9

Sei $\varepsilon > 0$

$f$ glm stetig auf $[a,b]$ (nach 10.9),

d.h. $\exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Betrachten nun Unterteilung und $\xi_j$ gemäß Voraussetzung.

Setze $\varphi(t) = f(\xi_j)$ für $t \in (t_{j-1}, t_j]$

$\varphi(a) = f(\xi_1)$

$\Rightarrow \varphi$ Treppenfkt und

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) = \int_a^b \varphi(t)\,dt$$

Außerdem $\|\varphi - f\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

(da $|(\varphi - f)(t)| = |f(\xi_j) - f(t)|$
wobei $|\xi_j - t| < \delta$ )

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \right|$$

$$= \left| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b \varphi(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f - \varphi)(t)\,dt \right|$$

$$\leq \|f - \varphi\| \cdot (b-a) < \varepsilon$$

$\square$

16.27. Beispiel: Stammfunktionen von rationalen Fkten (= Quotient von zwei Polynomfkten)

Seien $A(x)$, $B(x)$ zwei reelle Polynomfkten und $B(x) \neq 0 \quad \forall \ x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \quad \frac{A(x)}{B(x)} \text{ stetige Fkt auf } [a,b]$$

$$\int_a^b \frac{A(x)}{B(x)} \, dx = ?$$

Was ist Stammfkt zu $\frac{A(x)}{B(x)}$

1. Schritt: nach Euklidischen Algorithmus

$$A(x) = C(x) B(x) + R(x)$$

mit $C(x)$, $R(x)$ Polynomfkten und

grad $R <$ grad $B$

$$\Rightarrow \quad \frac{A(x)}{B(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stammfkt} \\ \text{bekannt}}}{C(x)} + \frac{R(x)}{B(x)}$$

also suche Stammfkt zu

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit grad $P <$ grad $Q$

Benutze nun:

1) Jede reelle Fkt $Q(x)$ ist Produkt

$$Q = Q_1^{k_1} \cdots Q_n^{k_n}$$

wo $Q_i$ unzerlegbar (irreduzibel) in $\mathbb{R}$

und grad $Q_i \leq 2$

2) Sei $Q = Q_1^{k_1} \cdots Q_n^{k_n}$ wie in (1)

Dann ist $\frac{P(x)}{Q(x)}$ Summe von Ausdrücken

der Form

$$\frac{ax+b}{Q_i^k(x)} \quad , \quad \frac{b}{Q_i^k(x)} \qquad \text{wo } 1 \leq k \leq k_i$$

$$(\text{grad } Q_i = 2) \qquad (\text{grad } Q_i = 1)$$

Diese können alle mittels rationaler Fkten, des Logarithmus und des Arcustangens integriert werden:

z.B. $$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a|$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

$$\frac{2x+1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+1}{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x|$$

**16.28. Definition:** Sei $I = (\alpha, \beta)$ ein offenes Intervall ($\alpha, \beta = \infty$ erlaubt) und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Fkt, so dass die Einschränkung von $f$ auf jedes abgeschl. Teilintervall $[a, b] \subset I$ eine Regelfkt ist. Das Integral

$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt konvergent, wenn eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ existiert mit: $\forall$ Folgen $(a_n), (b_n)$ in $I$ mit $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ gilt:

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx \longrightarrow A \quad \text{für } n \to \infty$$

Wir schreiben dann $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = A$ und nennen dies ein <u>uneigentliches Integral</u>

**16.29. Beispiele:** $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \overset{?}{=}$ für $s > 0$

1) $s > 1$: $$\int_1^{b_n} \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s} \left.\frac{1}{x^{s-1}}\right|_1^{b_n}$$

$$= \frac{1}{1-s}\Big(\underbrace{\frac{1}{b_n^{s-1}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} - 1\Big) \longrightarrow \frac{1}{s-1}$$

d.h. $$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{s-1} \quad \text{für } s > 1$$

2) $s = 1$:

$$\int_1^{b_n} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^{b_n} = \ln b_n - \ln 0$$

$$\to \infty \quad \text{für } b_n \to \infty$$

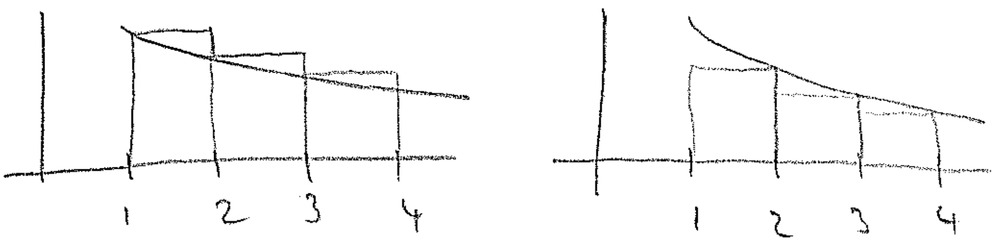
d.h. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ existiert nicht

3) ebenso: existiert nicht für $0 < s < 1$

**16.30. Satz** (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen):

Sei $f: [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallende Fkt. Die Reihe $\sum_{n \geq 1} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

**Beweis:**



Es gilt

$$\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \leq \int_1^{N} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

$\square$

**16.31. Beispiel:** Nach 16.29 konvergiert

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ genau dann wenn $s > 1$.