2. Sprache der Mathematik

2.1. "Naive" Definition (Cantor): Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

Beachte: diese Def. ist problematisch

z.B.: Menge aller Mengen führt zu Widersprüchen

→ axiomatische Mengenlehre (z.B. Zermelo-Fraenkel)

Bezeichnungen:

$M = \{x_1, x_2, x_3, ..\}$ Menge mit Elementen $x_1, x_2, x_3, ..$

$x \in M$ x ist Element von M

$x \notin M$ x ist kein —"—

$N \subset M$ N ist Teilmenge von M, d.h.

$x \in N \Rightarrow x \in M$

(oft schreibt man auch "$\subseteq$" statt "$\subset$")

$N = M \quad : \quad x \in N \Leftrightarrow x \in M$

d.h. gdw $N \subset M$ und $N \supset M$

<u>2.2. Operationen mit Mengen</u>: Seien M, N Mengen. Dann

i) $M \cup N$ <u>Vereinigung</u>

$x \in M \cup N :\Leftrightarrow x \in M \vee x \in N$

ii) $M \cap N$ <u>Durchschnitt</u>

$x \in M \cap N :\Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N$

iii) $M \setminus N$ <u>komplement</u> von N im M

$x \in M \setminus N :\Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin N$

$\cup, \cap$ sind kommutativ:

$M \cup N = N \cup M$

$M \cap N = N \cap M$

und associativ

$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$

$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$

und es gelten die Distributivgesetze

$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

2.3. Beispiele und Notationen für Mengen:

$\emptyset$ leere Menge (enthält kein Element)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$ rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$ reellen Zahlen

$\mathbb{C}$ komplexen Zahlen

beachte: für manche Autoren (z.B. Forster) ist auch 0 eine natürliche Zahl

2.4. Quantoren:

Viele math. Aussagen benutzen

$\forall$ für alle

$\exists$ es gilt

Beispiele: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$ wahre Aussage

$\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$ falsche –"–

allgemein: Sei M Menge, und $A(x)$ Aussage für jedes $x \in M$

$\forall x \in M : A(x)$ ist wahr, falls $A(x)$ wahr für alle $x \in M$

$\exists x \in M : A(x)$ ist wahr, falls $A(x)$ wahr für mindestens ein $x \in M$

~~beachte: (*)~~

beachte: $\forall x \in M \; \forall y \in N$ bedeutet das gleiche $\forall y \in N \; \forall x \in M$

$\exists x \in M \; \exists y \in N$ –"– $\exists y \in N \; \exists x \in M$

aber: $\forall x \in M \; \exists y \in N$ verschieden von

$\exists y \in N \; \forall x \in M$

Beispiel: (i) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N} : m > n$ ist wahr

(ii) $\exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : m > n$ ist falsch

(i) für jede Zahl gibt es eine größere

(ii) es gibt eine größte Zahl

2.5. Verneinung von Quantoren:

$$\neg\left(\forall x \in M : A(x)\right) \Longleftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$$

$$\neg\left(\exists x \in M : A(x)\right) \Longleftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$$

Typische mathematische Aussagen beinhalten mehrere Quantoren und Verneinung ist nichttrivial!

<u>Beispiel:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bei $x \in \mathbb{R}$

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

hat Verneinung

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists y \in \mathbb{R}: \neg \underbrace{(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)}_{\neg(|x-y| < \delta) \vee (|f(x)-f(y)| < \varepsilon)}$$

d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists y \in \mathbb{R}: |x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(x)| \geq \varepsilon$$

<u>2.6. Notation:</u> Sei I eine beliebige (Index-)Menge und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge.

Wir setzen

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I \text{ mit } x \in M_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall x \in I \text{ gilt } x \in M_i\}$$

2.7. Satz (Regel von de Morgan): Sei M_0 Menge und M_i Mengen für alle $i \in I$.

Dann gilt:

i) $M_0 \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right) = \bigcap_{i \in I} (M_0 \setminus M_i)$

ii) $M_0 \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i \right) = \bigcup_{i \in I} (M_0 \setminus M_i)$

Beweis: i) $x \in M_0 \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right)$

$\iff x \in M_0$ und $\underbrace{x \notin \bigcup_{i \in I} M_i}_{\neg (\exists i \in I \,:\, x \in M_i)}$

$\iff \forall i \in I : x \notin M_i$

$\iff \forall i \in I : \underbrace{x \in M_0 \text{ und } x \notin M_i}_{x \in M_0 \setminus M_i}$

$\iff x \in \bigcap_{i \in I} M_0 \setminus M_i$

ii) analog $\square$

2.8. Definition: 1) Seien X, Y Mengen. Eine ***Abbildung*** (oder ***Funktion***)

$$f : X \to Y$$

ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

X heißt *Definitionsbereich* von f,

Y heißt *Bildraum* oder *Wertebereich* von f.

Wir schreiben auch: $f : X \to Y$
$\qquad x \mapsto f(x)$

2) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

i) f heißt *injektiv*, falls

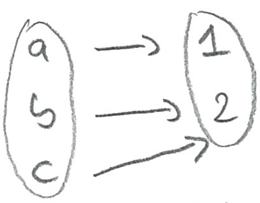
$$\forall x_1, x_2 \in X : [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$$

ii) f heißt *surjektiv*, falls

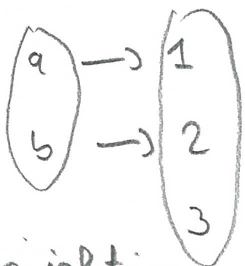
$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$$

iii) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv

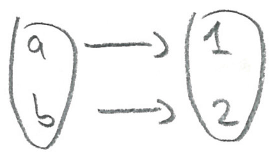
Beispiele:



nicht injektiv, $f(b) = f(c)$
surjektiv



injektiv
nicht surjektiv



bijektiv

2.9. Definition: Seien

$$f : X \to Y \;, \quad g : Y \to Z$$

Abbildungen. Dann ist die <u>Komposition</u> $g \circ f : X \to Z$ definiert durch

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad \text{für } x \in X$$

2.10. Notation: Mit $id_X : X \to X$ bezeichnen wir die <u>Identitätsabbildung</u> auf X

$$id_X(x) = x \qquad \forall x \in X$$

Es gilt: für jede Abbildung $f : X \to X$

$$f \circ id_X = f = id_X \circ f$$

beachte: Im allgemeinen ist

$$f \circ g \neq g \circ f$$

z.B. $f(x) = x^2$ $\qquad f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x + 1$

$$\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

2.11. Definition: Sei $f: X \to Y$ bijektiv.

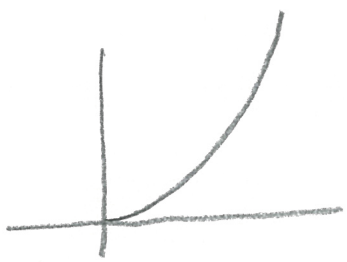
Dann existiert zu jedem $y \in Y$ (wegen Surjekt.) ein eindeutig bestimmtes (wegen Injektivität) $x \in X$, so dass $f(x) = y$.

Wir definieren die Umkehrabbildung von f durch

$$f^{-1}: Y \to X \quad , \quad f^{-1}(y) = x$$

Es gilt:
$$f \circ f^{-1} = id_Y$$
$$f^{-1} \circ f = id_X$$

Beispiel: $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$
$$x \mapsto x^2$$



ist bijektiv

$\Rightarrow f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty)$

existiert

und ist gegeben durch $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

beachte: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht bijektiv (weder inj. noch surj.)

und hat somit keine Umkehrabbildung

<u>2.12. Definition:</u> 1) Zwei Mengen N und M sind <u>gleichmächtig</u>, falls es eine bijektive Abbildung $N \to M$ gibt.

2) Eine Menge M heißt <u>abzählbar</u>, falls sie endlich ist oder die gleiche Mächtigkeit hat wie $\mathbb{N}$, d.h. falls es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to M$ ("Abzählung", eventuell mit Mehrfachzählung) gibt. $\emptyset$ ist auch abzählbar

3) Ist M nicht abzählbar, so heißt sie <u>überabzählbar</u>.

<u>Beispiel:</u> i) endliche Mengen sind abzählbar

ii) $\mathbb{N}$ ist abzählbar

iii) $\mathbb{Z}$ — " —

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

iv) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\leftarrow & -3 & & -2 & \leftarrow & -1 & & 0 & \rightarrow & 1 & & 2 & \rightarrow & 3 \\
& \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
& -\frac{3}{2} & & \frac{-2}{2} & & \frac{-1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} \\
& \uparrow & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow \\
& -\frac{3}{3} & & \frac{-2}{3} & \rightarrow & \frac{-1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} \\
& \uparrow & & & & & & & & & & & & \downarrow \\
& & \leftarrow & & & & & & & \cdots & & & \leftarrow &
\end{array}$$

2.13. Satz (Cantor 1874):

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: Wir zeigen

$[0,1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \}$

ist überabzählbar.

Wir stellen jede reelle Zahl in $[0,1]$ als Dezimalzahl dar.

Beweis durch Widerspruch: Nimm an, es gibt Surjektion $f: \mathbb{N} \to [0,1]$, d.h.

$$1 \mapsto 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \qquad (a_1, a_2, \ldots \in \{0,1,\ldots,9\})$$
$$2 \mapsto 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$$
$$3 \mapsto 0.c_1 c_2 c_3 c_4 \ldots$$
$$\vdots$$

Dann betrachte "Diagonalfolge"

$$r := 0.\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 \tilde{c}_3 \tilde{d}_4 \ldots$$

wobei
$$\tilde{x} := \begin{cases} 5 & \text{falls } x \neq 5 \\ 7 & \text{falls } x = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow r \in [0,1]$, aber

$r \neq 0.a_1 a_2 a_3 \ldots$ (da an 1. Nachkommastelle verschieden)

$r \neq 0.b_1 b_2 b_3 \ldots$ (—"— 2. —"—)

$r \neq 0.c_1 c_2 c_3 \ldots$ (—"— 3. —"—)

also: $r \in [0,1]$, aber nicht in obigen Liste enthalten,

Wdsp dazu, dass φ Surjektion

also Annahme falsch, d.h. $[0,1]$ überabzählbar. $\square$

[beachte: Dezimaldarstellung nicht eindeutig

z.B. $0.50000\ldots = 0.49999\ldots$

Im obigem Beweis wählen wir immer die nicht-abbrechende Darstellung um Darstellung eindeutig zu machen.]