3. $\mathbb{R}$ als angeordneter Körper

Die reellen Zahlen haben verschiedene Strukturen:

- Körper
- Anordnung
- Vollständigkeit

zunächst betrachten wir die ersten beiden!

3.1. Definition: Ein Körper (field) ist eine Menge $K \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen

$$+ : K \times K \to K \qquad \text{"Addition"}$$
$$(a,b) \mapsto a+b$$

$$\cdot : K \times K \to K$$
$$(a,b) \mapsto a \cdot b \qquad \text{"Multiplikation"}$$

so dass gilt:

1) Assoziativgesetze:

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \forall a,b,c \in K$$
$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) \qquad \forall a,b,c \in K$$

2) Kommutativgesetze:

$$a+b = b+a \qquad \forall a,b \in K$$
$$a\cdot b = b\cdot a \qquad \forall a,b \in K$$

3) Existenz neutraler Elemente :

$\exists\, 0 \in k \;\; \forall a \in k : \quad a + 0 = a$

$\exists\, 1 \in k \;\; \forall a \in k : \quad a \cdot 1 = a$

$1 \neq 0$

4) Existenz inverser Elemente

$\forall a \in k \;\; \exists -a \in k : \quad a + (-a) = 0$

$\forall a \in k \;\; \exists\, a^{-1} \in k : \quad a \cdot a^{-1} = 1$

$a \neq 0$

5) Distributivgesetz

$a(b+c) = ab + ac \qquad \forall a,b,c \in k$

<u>3.2. Beispiele für Körper:</u>

i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist <u>kein</u> Körper

(da Inverses bzgl. Multiplikation im Allgemeinen nicht existiert)

ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper

$\mathbb{C}$ ist körper

iii) Es gibt auch endliche Körper, z. B.

für Primzahl p

$\mathbb{F}_p := \{0, 1, \ldots, p-1\}$ mit Verknüpfungen

$+$ Addition modulo p

$\cdot$ Multiplikation modulo p

Beispiel: $p = 2$

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Inverse

a	$-a$	a^{-1}
0	0	/
1	1	1

3.3. Einfache Folgerungen aus Körper-Axiomen:

Aus den Körperaxiomen folgen nun etliche "offensichtliche" Aussagen, wie

i) $0, 1$ sind eindeutig bestimmt

ii) $-a$ und a^{-1} sind eindeutig bestimmt

iii) $-0 = 0$

iv) Die Gleichung $a + x = b$ hat eindeutig bestimmte Lösung, $x = b - a$

[Bezeichnung: $b - a := b + (-a)$]

v) Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat, für $a \neq 0$, eindeutig bestimmte Lösung,

$x = \frac{b}{a}$.

[Bezeichnung: $\frac{b}{a} := a^{-1} b$ für $a \neq 0$]

(vi) $\forall\, a,b \in k$ gilt:

$$-(-a) = a \quad , \quad -(a+b) = -a-b$$

$$a \cdot 0 = 0 \quad , \quad -a = (-1)\cdot a$$

$$(-a)\cdot(-b) = ab$$

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad , \quad (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

$$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

etc. ..

Zur Übung beweisen wir

(a) 0 ist eindeutig bestimmt

(b) $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in k$

Beweis: (a) Seien $0, \tilde{0}$ so dass

$$\forall a \in k: \quad a + 0 = a \quad , \quad a + \tilde{0} = a$$

dann: $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$

$\qquad\quad \|$ $\qquad\qquad\qquad \implies 0 = \tilde{0}$

$\qquad 0 + \tilde{0} = 0$

(b) Es gilt:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a\,0 + a\,0$$

$$\overset{(iv)}{\implies} \quad a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$$

beachte: all diese Eigenschaften gelten nicht nur in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$, sondern in jedem Körper, also z.B. auch in $\mathbb{F}_p$.

3.4. Definition: Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt **angeordnet**, falls wir gewisse Elemente in K als **positiv** auszeichnen können (Schreibweise: $a > 0$), so dass gilt:

1) Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$a > 0 \,, \quad a = 0 \,, \quad -a > 0$$

2) $a > 0$ und $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

3.5. Notationen:

$$a > b \;:\Longleftrightarrow\; a - b > 0$$

$$a < b \;:\Longleftrightarrow\; b > a$$

$$a \geq b \;:\Longleftrightarrow\; a > b \vee a = b$$

$$a \leq b \;:\Longleftrightarrow\; a < b \vee a = b$$

$$\max(a,b) := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\min(a,b) := \begin{cases} a & \text{falls } a \leq b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

3.6. Beispiele von angeordneten Körpern:

i) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper

ii) $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden

iii) $\mathbb{F}_p$ kann nicht angeordnet werden

Beweis für $p = 2$: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

$0 \neq 1$, somit entweder $0 < 1$ oder $0 > 1$

Fall 1) $1 > 0$

dann: $1 > 0$ und $1 > 0$

$$\Rightarrow \underbrace{1 + 1}_{0} > 0 \qquad \text{Wdsp}$$

Fall 2) $0 > 1$, d.h. $\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{-1} > 0$

d.h. reduziert sich auf Fall 1, Wdsp

also:

$\left.\begin{array}{l}\text{Anordnung}\\ \text{auf } \mathbb{F}_2\end{array}\right\} \Rightarrow$ Wdsp

somit existiert keine Anordnung auf $\mathbb{F}_2$

3.7. Einfache Folgerungen aus Anordnungsaxiomen:

Ist $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper, so gilt:

i) $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$

("$<$" ist transitiv)

ii) $a<b \Rightarrow \forall c \in K: a+c<b+c$

iii) $a<b \wedge c>0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

iv) $a<b \Rightarrow -a>-b$

v) $\left.\begin{array}{l} 0\le a<b \\ 0\le c<d \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot c<b\cdot d$

vi) $a>0 \Rightarrow a^{-1}>0$

$0<a<b \Rightarrow a^{-1}>b^{-1}$

(vii) $a^2\ge 0 \quad \forall a\in K$ etc..

insbes. $1>0$

Wir beweisen nur (iii) und (v)

(iii) $a<b \Leftrightarrow b-a>0$

$$\left.\begin{array}{l} b-a>0 \\ c>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{(b-a)\cdot c}_{bc-ac>0}>0$$

$\Leftrightarrow bc>ac$ ⊡

(v) Falls $a=0 \vee c=0$, dann klar

Also betrachte $a>0 \wedge c>0$

$\left.\begin{array}{l} a<b \\ c>0 \end{array}\right\} \Rightarrow ac<bc$, $\left.\begin{array}{l} c<d \\ b>0 \end{array}\right\} \Rightarrow bc<bd$

also: $ac<bc<bd \Rightarrow ac<bd$ ⊡

3.8. Bemerkung: Sei K ein angeordneter Körper. Dann können wir $\mathbb{N}$ in K einbetten.

Sei $1_K \in K$ die Eins von K; dann setze

$$n_K := \underbrace{1_K + \ldots + 1_K}_{n \text{ mal}} \in K$$

Dann gilt: $(n+m)_K = n_K + m_K$, $(n \cdot m)_K = n_K \cdot m_K$, $n_K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

und

$$\mathbb{N} \to K$$
$$n \mapsto n_K$$

ist injektiv

[die ersten beiden Eigenschaften klar,

$n_K > 0$, da $1_K > 0$ und Summe von positiven Größen positiv

injektiv: Sei $m_K = n_K$ für $m > n$

$\Rightarrow (m-n)_K = 0$

Wdsp da $m-n \in \mathbb{N}$ und

somit $(m-n)_K > 0$ nach obigem]

oder: $m-n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow (m-n)_K > 0$
$\Rightarrow m_K = (m-n)_K + n_K > n_K$
$\lightning$

Somit finden wir in jedem angeordneten Körper eine Kopie von $\mathbb{N}$. Wir werden n mit n_K identifizieren.

beachte: Anordnung ist wichtig für die Injektivität in $\mathbb{F}_p$ finden wir z.B. keine Kopie von $\mathbb{N}$

3.9. Satz (Bernoullische Ungleichung):

Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt für alle $x \in K$ mit $x > -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweis: durch Induktion nach n

$n = 1$: z.z.: $1 + x \geq 1 + x$ wahr

$n \to n+1$: gelte $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

z.z.: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x$

Es gilt:

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\substack{\geq 1+nx \\ \text{Ind.Vor.}}} \underbrace{(1+x)}_{\substack{>0 \\ \text{da} \\ x>-1}} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)x \qquad \square$$

~~3.10 Definition: Ein angeordneter Körper heißt archimedisch, falls zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit~~

~~$x < n$~~

3.10 Definition: Sei k ein angeordneter Körper. Für $a \in k$ setzen wir

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$|a|$ heißt Absolutbetrag.

3.11. Eigenschaften von $|\cdot|$

Es gilt für alle $a, b \in k$:

i) $|-a| = |a|$

ii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecks-Ungleichung)

Beweis: i), ii) klar

iii) $\left.\begin{matrix} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b \leq |a|+|b|$

$\left.\begin{matrix} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{-a-b}_{-(a+b)} \leq |a|+|b|$

also: $|a|+|b| \geq a+b \wedge |a|+|b| \geq -(a+b)$

$\Rightarrow |a|+|b| \geq |a+b|$ $\square$

3.12 Definition: Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch, falls zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n$

3.13 Bemerkungen: Ist K archimedisch, so folgt:

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

(ii) Ist $b > 1$, so existiert zu jedem $R \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$b^n > R \quad \forall n \geq N$$

(iii) Ist $0 < q < 1$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$q^n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Beweis: (i) K archimedisch

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} < N$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

(ii) $x := b - 1 > 0$

K archimedisch $\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : \frac{R}{x} < N$

$\Rightarrow R < Nx$

$$\overset{\text{Bernoulli}}{\underset{3.9.}{\Longrightarrow}} \; b^N = (1+x)^N \geq 1 + Nx > Nx > R$$

somit für $n \geq N$: $b^{n-N} \geq 1$ (da $b > 1$)

also:
$$\begin{aligned} b^n &= b^{n-N} \cdot b^N \\ &\geq b^N \\ &> R \end{aligned}$$

(iii) $0 < q < 1 \Rightarrow q^{-1} > 1$

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \exists N \; \forall n \geq N \; (q^{-1})^n > \varepsilon^{-1} > 0$

$\Rightarrow \underbrace{((q^{-1})^n)^{-1}}_{= q^n, \text{ da } (q^{-1})^n \cdot q^n = 1} < \varepsilon$ $\square$

<u>3.14. Axiom:</u> $\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordneter Körper.

<u>3.15. Bemerkung:</u> Auch $\mathbb{Q}$ ist archimedisch angeordneter Körper. Wir brauchen also noch weitere Eigenschaft, um $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ zu unterscheiden.

$\mathbb{R}$ enthält mehr Zahlen als $\mathbb{Q}$ (z.B. $\sqrt{2}, e, \pi$)

$\mathbb{R}$ ist vollständig, $\mathbb{Q}$ nicht

Um dies zu formalisieren, brauchen wir Folgen!