4. Folgen

4.1. Definition: Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Schreibweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$

Folgen müssen nicht mit dem Index 1 beginnen, auch Folgen der Form $(a_n)_{n\geq n_0}$ sind möglich.

4.2. Beispiele von Folgen:

i) $a_n = 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$, also $(2, 2, \dots)$

ii) $a_n = n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, also $(1, 2, 3, \dots)$

iii) $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, also $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

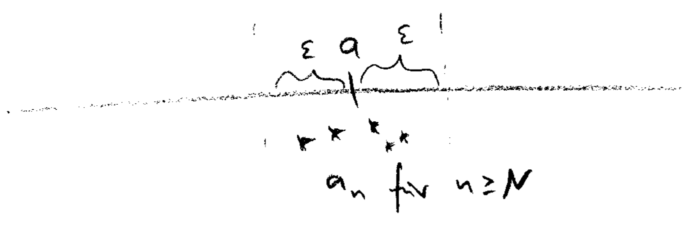
iv) $a_n = (-1)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, also $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

4.3. Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *konvergent* mit Grenzwert $a\in\mathbb{R}$ (oder „konvergiert gegen a"), falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \quad |a - a_n| < \varepsilon$$

Schreibweise: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ für $n\to\infty$

Typischerweise ist ε sehr klein, d.h. ab dem Index N liegen alle Folgenglieder nah bei a



4.4. Bemerkung: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die inverse Dreiecksungleichung $||x|-|y|| \leq |x-y|$

(Beweis auf Übungsblatt 3)

4.5. Beispiele:

i) $a_n = 2$ ist eine konvergente Folge mit Grenzwert 2

[Es ist $|2-a_n| = 0 < \varepsilon$ für jedes n und jedes $\varepsilon > 0$]

ii) $a_n = n$ konvergiert nicht, da $|a-n| \geq n - |a|$ beliebig groß ist, für jedes $a \in \mathbb{R}$

iii) $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0

[Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N so, dass $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Dann $|0-a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ $\forall n \geq N$]

iv) $a_n = (-1)^n$ konvergiert nicht

[Angenommen es existiere $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Betrachte $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq N$. Dann folgt für alle $n \geq N$, dass

$2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = 1$

Widerspruch]

4.6. Bemerkung: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

<u>Beweis</u>: Seien $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to a'$ für $n \to \infty$. Dh. zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a' - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N$ (genauer gesagt ex. ein N_1 für a und ein N_2 für a'. Mit $N := \max(N_1, N_2)$ kann man jedoch o.E. dasselbe N für a und a' wählen)

Dann gilt $|a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \leq |a - a_n| + |a' - a_n| < \varepsilon$

Dies gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $|a - a'| = 0$, dh. $a = a'$ $\square$

4.7. <u>Sprechweise</u>: Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt <u>divergent</u>.

4.8. <u>Bemerkung</u>: (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a, $\varepsilon > 0$ gegeben und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

Statt N kann auch jedes $N' \geq N$ gewählt werden (im Beweis von Bemerkung 4.6 benutzt).

(b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent. Die Folge bleibt konvergent mit demselben Grenzwert, wenn in $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlich viele Folgenglieder abgeändert werden. Insbesondere hat $(a_n)_{n \geq n_0}$ denselben Grenzwert wie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

[Sei $(a_n')_{n \in \mathbb{N}}$ die abgeänderte Folge und $K \in \mathbb{N}$ so groß, dass $a_n = a_n'$ $\forall n \geq K$. Sei a der Grenzwert von (a_n). Sei $\varepsilon > 0$ und N, so dass $|a - a_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Dann ist für alle $n \geq \max(N, K)$ $|a - a_n'| = |a - a_n| < \varepsilon$. Also konvergiert auch (a_n') gegen a.]

4.9. Satz: Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x|<1$ und $s_n := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.
Dann ist die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{1-x}$

Beweis: Von Übungsblatt 1 ist bekannt, dass
$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ist. Wie kommt man auf diese Formel?

$$
\begin{aligned}
s_n(1-x) &= (1+x+x^2+ \ldots + x^n)(1-x) \\
&= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \\
&\quad - x - x^2 - \ldots - x^n - x^{n+1} \\
&= 1 - x^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x|^{n+1} < \varepsilon \cdot (1-x)$ $\forall n \geq N$.

Dann ist $\left|s_n - \frac{1}{1-x}\right| = |x^{n+1}| \cdot \frac{1}{1-x} < \varepsilon$ für $n \geq N$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ $\square$

4.10. Beispiele:

i) $x = \frac{1}{2}$, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$, dann $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

ii) $x = \frac{1}{3}$, $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}$, dann $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

iii) periodischer Dezimalbruch $0,\overline{37} = \frac{37}{100} + \frac{37}{10000} + \ldots$
betrachte $s_n = 37\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^{n+1}}\right) = \frac{37}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{100^n}\right)$
Mit $x = \frac{1}{100}$ gilt nach Satz 4.9: $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{37}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) = \frac{37}{99}$
Habe also andere Schreibweise für $0,\overline{37}$ gefunden: $\frac{37}{99}$.

4.11. Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es ein $K\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \le K$ (bzw. $a_n \ge K$) $\forall n\in\mathbb{N}$. Die Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

4.12. Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n \to a\in\mathbb{R}$ für $n\to\infty$. Dann ex. ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ $\forall n\ge N$.
Sei $K_1 := \min\{a_1,\dots a_{N-1}\}$, $K_2 := \max\{a_1,\dots a_{N-1}\}$ das kleinste bzw. das größte Element der endlichen Menge $\{a_1,\dots a_{N-1}\}$. (Diese Definition ist nur für endliche Mengen sinnvoll, siehe später.)
Es gilt nun:

$$K_1 \le a_n \le K_2 \quad \text{für } n < N$$
$$a-1 \le a_n \le a+1 \quad \text{für } n \ge N$$

Also $\min\{K_1, a-1\} \le a_n \le \max\{K_2, a+1\}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. □

4.13. Bemerkung: Seien $a,x\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Dann

$$|x-a|<\varepsilon \iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

4.14. Satz: Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann sind die Folgen (a_n+b_n) und $(a_n\cdot b_n)$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Beweis: 1.) Sei $\varepsilon > 0$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Wähle $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N_1$ und $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N_2$.
Setze $N := \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|(a+b) - (a_n + b_n)| = |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon$$

Somit ist die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $a+b$.

2.) Seien wieder $\varepsilon > 0$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist nach Satz 4.12, ex. ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq K$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2|b|+1}$, $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$ $\forall n \geq N$.
($N = \max\{N_1, N_2\}$ wie in 1.)) Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|(ab) - (a_n b_n)| = |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| = |(a - a_n)b + a_n(b - b_n)|$$

$$\leq \underbrace{|a - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2|b|+1}} \cdot |b| + \underbrace{|b - b_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2K}} \cdot \underbrace{|a_n|}_{\leq K} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

4.15. Korollar: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann ist $\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$. [mit $b_n := (\lambda, \lambda, \dots)$ und 4.14]

Sei zusätzlich $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann

$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$. [mit $\lambda = -1$ ist $\lim(-b_n) = -b$, dann 4.14]

4.16. Beispiele: i) $a_n = \frac{n+1}{n} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$, also $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + 0 = 1$

ii) $b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = a_n \cdot a_n$, also $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim a_n \cdot \lim a_n = 1$

4.17. Satz: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$
und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0} = \frac{\lim_{n\to\infty} (a_n)_{n\geq n_0}}{\lim_{n\to\infty} (b_n)_{n\geq n_0}}.$$

__Beweis:__ Seien $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|b - b_n| < |b|$ für alle $n \geq n_0$. ($\varepsilon := |b| > 0$).
Dann ist $b_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ (da sonst $|b - 0| \not< |b|$).

1. Fall: $a_n \equiv 1$ $\forall n$. Betrachte also $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$, z.z.: $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ für $n \to \infty$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}|b|^2$ und $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ $\forall n \geq N$ (wieder N als Maximum zweier N_i).
Aus der zweiten Abschätzung folgt $|b_n| > |\frac{b}{2}|$,
(mit Bemerkung 4.13 und einer Fallunterscheidung $b > 0$ oder $b < 0$: Haben $b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2}$. $b > 0$: $0 < \frac{b}{2} < b_n < \frac{3}{2}b$
$b < 0$: $\frac{3}{2}b < b_n < \frac{b}{2} < 0$)

daraus folgt $\left|\frac{1}{b_n}\right| < \left|\frac{2}{b}\right| \Rightarrow \left|\frac{1}{b \cdot b_n}\right| < \left|\frac{2}{b^2}\right|$.

Also ist $\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b b_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}|b|^2 \cdot \left|\frac{2}{b^2}\right| = \varepsilon$ für $n \geq N$.

2. Fall: a_n beliebig. Dann $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b}$ $\square$

__4.18. Beispiel:__ $a_n = \dfrac{5n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 10n} = \dfrac{5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{10}{n}} \longrightarrow \frac{5}{3}$ für $n \to \infty$

4.19. __Satz:__ (a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n')_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n' = b$ und $b_n' \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert b.

<u>Beweis</u>: (a) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$a - \varepsilon \le a_{n_0}$, $b_{n_0} \le b + \varepsilon$ (wobei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n$).

Warum existiert dieses n_0 eigentlich?

(Bemerkung 4.13. liefert $\underset{(n \ge N_1)}{a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon}$, $\underset{(n \ge N_2)}{b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon}$, $n_0 := \max\{N_1, N_2\}$.)

Somit ist $a - \varepsilon \le a_{n_0} \le b_{n_0} \le b + \varepsilon \Rightarrow a - b \le 2\varepsilon$

Da ε beliebig war, ist $a - b \le 0$ (archimed. Axiom).
d.h. $a \le b$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $b - \varepsilon < b_n'$ und $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Dann ist

$b - \varepsilon < b_n' \le a_n \le b_n < b + \varepsilon \quad \forall n \ge N$ und mit Bemerkung 4.13. also $|a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \ge N$. □

4.20. <u>Bemerkung</u>: (a) Im Satz 4.16. genügt es Ungleichungen für $n \ge n_0$ zu haben.

(b) Aus $a_n \to a$, $b_n \to b$ für $n \to \infty$ und $a_n < b_n$ folgt <u>nicht</u> $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, sondern nur $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.

[Nehme beispielsweise $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Dann $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \ \forall n \ge 2$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$]

4.21. <u>Beispiel</u>: Will den Limes von $\frac{n}{2^n}$ berechnen, oder allgemeiner von $a_n := n x^n$ für $0 < x < 1$.

Wissen: (i) $q^n \to 0$ nach arch. Ax. $(\forall 0 < q < 1)$

(ii) $\frac{n+1}{n} x \to x$, da $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$

(iii) $\exists q \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < q < 1$ (z.B. $q := x + \frac{1-x}{2}$)

Wegen (ii) ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{n+1}{n} x \leq q$ für $n \geq n_0$. Schreibe $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0}$

Es gilt $\forall k \geq n_0$: $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1) x^{k+1}}{k x^k} = \frac{k+1}{k} x \leq q$

Daher ist $a_n \leq \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{(n-n_0)\text{-mal}} \cdot a_{n_0} = q^n \cdot \underbrace{\left(\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}\right)}_{=:\lambda} \quad \forall n \geq n_0$

Somit ist $0 \leq a_n \leq q^n \lambda$, wo $q^n \lambda \longrightarrow 0$ nach (i).

$\overset{4.19(b)}{\Longrightarrow}$ (a_n) ist konvergent mit Grenzwert 0 □

4.22 Definition: Sei (a_n) Folge reeller Zahlen. (a_n) heißt <u>bestimmt divergent</u> (oder uneigentlich konvergent) gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls

$\forall k \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : a_n > k$

(bzw. $a_n < k$)

Wir schreiben: $\lim a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$

(bzw. $\lim a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$)

4.23. Beispiele: i) $a_n = n$: $a_n \to +\infty$

ii) $a_n = -n^2$: $a_n \to -\infty$

iii) $a_n = (-1)^n$: divergent

iv) $a_n = (-1)^n \cdot n$: divergent

4.24 Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen mit $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Beweis: $\lim a_n = +\infty$

$\iff \forall K \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad a_n > K$

$\iff \forall K > 0 \quad$ — " —

$\iff \forall K > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \frac{1}{a_n} < \frac{1}{K}$

$\overset{\varepsilon = \frac{1}{K}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \frac{1}{a_n} < \varepsilon$

$\iff \lim \frac{1}{a_n} = 0$

beachte: $a_n > 0$, somit $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{a_n}$

$\square$

4.25. Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{(Partialsummen)},$$

heißt <u>unendliche Reihe</u> und wird mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so schreiben wir $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

Allgemeiner, kann man auch Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ nehmen, und die Reihe

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

betrachten.

4.28 Beispiele: 1) geometrische Reihe

Für $x\in\mathbb{R}$, $|x|<1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (\text{siehe } 4.9)$$

2) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \; ?$$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}}_{\frac{1}{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{3}}_{\frac{4}{3}}\right)}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots$$

$$\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}}_{\frac{1}{3}\left(\underbrace{2+\frac{1}{4}}_{\frac{9}{4}}\right)}+\dots$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{3}{4}}$$

Beweise mit Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Da $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$

folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1$$

3) Viel schwieriger ist zu zeigen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4) harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \ ?$$

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

also für alle $n \geq 2^m$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2}$$

Somit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergent und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

5) Allerdings hat man für alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \pm \ldots = \ln 2$$