5. Vollständigkeitsaxiom

5.1. Motivation:

$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind beide archimedisch angeordnete Körper, aber $\mathbb{Q}$ ist unvollständig, während $\mathbb{R}$ vollständig ist

In $\mathbb{Q}$ "fehlen" Zahlen, die eigentlich dasein sollten

z. B. 3
3,1
3,14
3,141
3,1415
3,14159
⋮

ist Folge (a_n), die eigentlich konvergieren sollte, aber in $\mathbb{Q}$ gibt es keinen Grenzwert.

In $\mathbb{R}$ existiert der Grenzwert,

$a_n \to \pi \in \mathbb{R}$

Warum sollte (a_n) konvergieren

$\to$ $|a_n - a_m|$ ist beliebig klein, falls nur n, m hinreichend groß

$\to$ wird formalisiert durch Konzept der Cauchy-Folge!

5.2. Definition: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

5.3. Satz: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle N so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$$

Sei $n, m \geq N$, also $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

somit:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$$

$$\leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_m|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \varepsilon$$

□

5.4. Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$:

Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert gegen einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

5.5. Bemerkungen: 1) Vollständigkeitsaxiom ist unabhängig von anderen Axiomen (wie Existenz von $\mathbb{Q}$ zeigt)

2) Cauchy-Eigenschaft erlaubt Konvergenz einer Folge zu prüfen, ohne Grenzwert zu kennen.

3) Beachte: in Cauchy-Eigenschaft muss man $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$ überprüfen

$|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ für hinr. großes n reicht nicht

z.B. $\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

dann $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ für n hinr. groß

aber (s_n) konvergiert nicht (da $s_n \to \infty$)

5.6. Notation: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ bezeichnen wir

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes — " —

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes — " —

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Im jedem Fall heißen a, b die Randpunkte oder Endpunkte des Intervalls I und

$$|I| := b - a$$

seine Länge

5.7. Intervallschachtelungs-Prinzip: Sei

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$$

eine absteigende Folge von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} |I_n| = 0$$

Dann gibt es genau eine reelle Zahl x mit $x \in I_n$, d. h.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$$

5.8. Satz: Es sind äquivalent:

(1) Vollständigkeitsaxiom

(2) Intervallschachtelungs-Prinzip

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2)

Seien $I_n = [a_n, b_n]$ mit $I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

und $|I_n| = b_n - a_n \to 0$

Beh.: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge.

Beweis: Betrachte $\varepsilon > 0$

Da $|I_n| \to 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ so dass

$\forall n \geq N: \quad |I_n| < \varepsilon$

Somit gilt für $n, m \geq N$:

$a_n, a_m \in I_N$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < |I_N| < \varepsilon$

also: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$

d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge $\square$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ (a_n) konvergiert

Sei $x := \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k \qquad \forall n \geq k$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$x$$

$\overset{4.19}{\Longrightarrow}$ $a_k \leq x \leq b_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

d.h. $x \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k$

Eindeutigkeit: Sei $x, y \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k$

$x, y \in I_k \Rightarrow 0 \leq |x - y| \leq |I_k| \longrightarrow 0$

$\overset{4.19}{\Longrightarrow}$ $|x - y| = 0 \qquad$ d.h. $x = y$

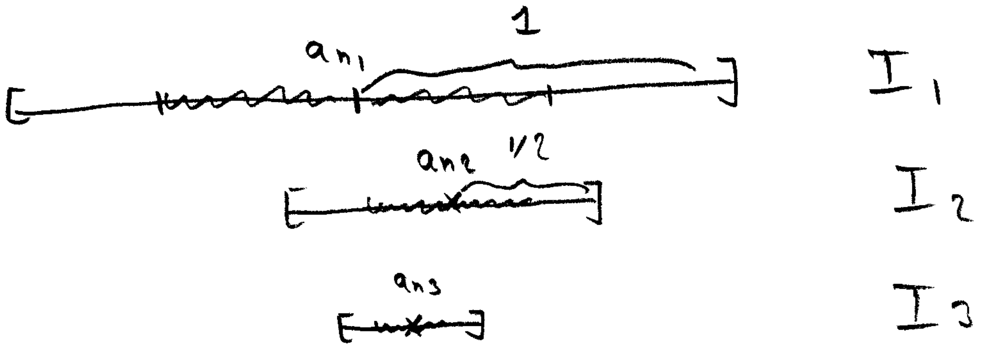
(2) $\Rightarrow$ (1) : Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge

$\Rightarrow \exists n_k \in \mathbb{N} \ \forall n,m \geq n_k : |a_n - a_m| < 2^{-k}$

Wir können die n_k so wählen dass

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Setze $\quad I_k := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}\}$



$\Rightarrow I_{k+1} \subset I_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$|I_k| = 2^{-k+2} \to 0$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \exists a \in \mathbb{R} : \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{a\}$

Es gilt:

- $\forall k \in \mathbb{N} : a \in I_k$, d.h. $|a - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}$
- $\forall n \geq n_k : |a_n - a_{n_k}| < 2^{-k}$

somit: $\forall n \geq n_k$

$$|a - a_n| \leq \underbrace{|a - a_{n_k}|}_{\leq 2^{-k+1}} + \underbrace{|a_{n_k} - a_n|}_{< 2^{-k}} < 2^{-k+2}$$

also: $a_n \to a$

5.9. Bemerkungen: 1) Beachte, dass wir im Intervallschachtelungs-Prinzip abgeschlossene Intervalle brauchen.

z. B. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}] = \emptyset$

2) Vollständigkeitsaxiom (mit Cauchyfolgen) benutzt weniger Struktur von $\mathbb{R}$ als Intervallschachtelungs-Prinzip und ist deshalb besser geeignet Vollständigkeit in allgemeinen Situationen zu definieren.

5.10. Definition: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge und

$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

aufsteigende Folge natürlicher Zahlen.

Dann heißt Folge

$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$

Teilfolge der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \ldots \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & a_2 & a_3 & & a_5 & & a_7 & \ldots \end{array}$$

$(a_2, a_3, a_5, a_7, \ldots)$ Teilfolge von $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

<u>5.11. Bemerkung</u>: Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt trivialerweise: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert auch $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

<u>5.12. Satz (Bolzano-Weierstraß)</u>:

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

<u>5.13. Bemerkungen</u>: 1) Unbeschränkte Folgen brauchen keine konvergenten Teilfolgen zu besitzen, z.B. $a_n = n$

Allerdings gilt: Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~reeller~~ Zahlen besitzt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die entweder konvergiert oder bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$ ist.

2) Bolzano-Weierstraß ist eigentlich nicht über Eigenschaft von Folgen, sondern über Raum, in dem sie Werte annehmen.

BW sagt, dass $[a,b]$ "kompakt" ist, d.h. dass man ∞-viele Zahlen dort nur so verteilen kann, dass sie sich irgendwo häufen.

Beweis von 5.12: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, d.h. $\exists\ A, B \in \mathbb{R}$ s.d.

$$A \le a_n \le B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir konstruieren Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_k \subset \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mit

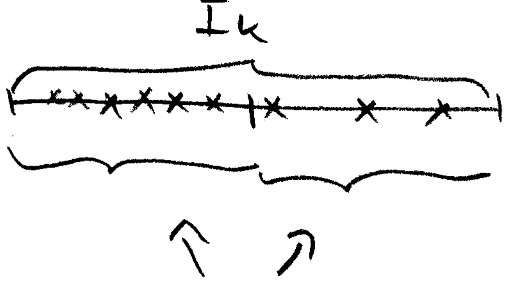
(i) in I_k liegen ∞-viele Glieder von (a_n)

(ii) $I_k \subset I_{k-1} \quad \forall\ k \ge 1$

(iii) $|I_k| = 2^{-k}\ |I_0|$

Setze $I_0 := [A, B]$

Sei I_k, für $k \in \mathbb{N}$, definiert. Dann wähle I_{k+1} wie folgt



in mindestens einer Hälfte von I_k liegen ∞-viele a_n

Wähle solche Hälfte als I_{k+1}

$(\rightarrow |I_{k+1}| = \frac{1}{2}\ |I_k|\ )$

$\rightsquigarrow$ definiert induktiv Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ welche (i), (ii), (iii) erfüllt

Definiere nun Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_{n_k}\in I_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$
wie folgt:
$a_{n_0} := a_1 \in [A,B] = I_0$

Sei $n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ bereits gewählt.

Da I_{k+1} ∞-viele a_n enthält, gibt es

$n_{k+1} > n_k$, so dass $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$

Beh.: diese Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge (und konvergiert somit)

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$

Wähle N so groß dass $|I_N| < \varepsilon$

dann gilt für $k, l \geq N$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{n_k} \in I_k \subset I_N \\ a_{n_l} \in I_l \subset I_N \end{array}\right\} \Rightarrow |a_{n_k} - a_{n_l}| \leq |I_N| < \varepsilon$$

d.h. $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchyfolge

[$(a_{n_k})_k$ konvergiert gegen $\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} I_k$] $\square$

<u>5.14. Definition</u>: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

i) monoton wachsend: falls $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ii) streng monoton wachsend: $a_n < a_{n+1}$

iii) monoton fallend $a_n \geq a_{n+1}$

iv) streng monoton fallend: $a_n > a_{n+1}$

5.15. Satz: Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

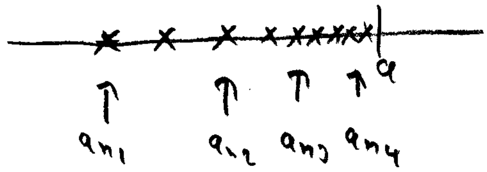
Beweis: Nach B-W (5.12) gibt es konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$

Wir behaupten: Dann konvergiert ganze Folge gegen a.

Sei (a_n) monoton wachsend (Beweis für "fallend" analog)

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle k so groß dass

$$|a - a_{n_k}| < \varepsilon$$



(a_n) monoton wachsend

$$\Rightarrow \forall\, n \geq n_k : \quad a_{n_k} \leq a_n \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } n_j \geq n}}{a_{n_j}} \leq a$$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_k$$

$$\Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

$\square$

5.16. Satz: Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ reelle Zahlen. Definiere rekursiv

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad (n \geq 0)$$

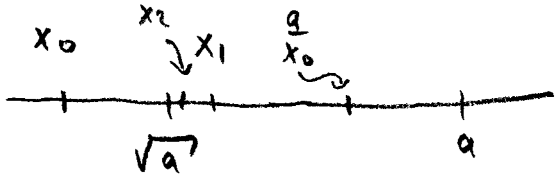
Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen die Quadratwurzel von a, d.h. gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung von $x^2 = a$.

Beweis: Es gilt:

(i) $x_n > 0 \quad \forall\, n \geq 0$ (klar nach Def.)

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall\, n \geq 1$

(beachte: muß nicht für $n=0$ gelten)



denn: $\forall\, n \geq 1$

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - a$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2$$

$$\geq 0$$

und somit $\forall\, n \geq 1$

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}\underbrace{\left(x_n^2 - a\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

Somit ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte monotone Folge und nach 5.15 existiert

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \text{ (und } x \geq 0 \text{ nach Satz 4.19 (a))}$$

Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcccccc} & 2x_{n+1} & \cdot & x_n & = & x_n^2 & + a \\ n\to\infty & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & x & & x & & x^2 & \end{array} \quad \Rightarrow 2x^2 = x^2 + a$$

d.h. $x^2 = a$

(Wegen $a \neq 0$ gilt also insbesondere $x > 0$.)

Eindeutigkeit: Sei $x, y > 0$ mit $x^2 = a = y^2$

$\Rightarrow 0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

$\Rightarrow x - y = 0$ oder $x + y = 0$

da $x, y > 0$ ist $x + y > 0$,

also $x - y = 0$ d.h. $x = y$ $\square$

<u>5.17. Bemerkungen</u>: 1) Geschwindigkeit der Konvergenz in diesem Algorithmus ist sehr schnell, nämlich quadratisch:

$x_n \to \sqrt{a}$, setze $x_n = \sqrt{a}(1 + f_n)$

$\Rightarrow f_{n+1} \leq \frac{1}{2} f_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

z.B.: $a = 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = \frac{3}{2} = 1.5$

$x_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12} = 1.41\overline{6}$

$x_3 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = \frac{577}{408} = 1.414215$

2) Analog kann man für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Existenz der k-ten Wurzel $\sqrt[k]{a}$ für $a > 0$ durch den Algorithmus

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)\, x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

beweisen.

<u>5.18. Satz:</u> Die Folge $\sqrt[n]{n}$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

<u>Beweis:</u> Setze $\sqrt[n]{n} - 1 =: x_n \qquad x_n \geq 0 \quad (n \geq 1)$

Dann gilt:

$$n = (1+x_n)^n = 1 + n x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \dots + x_n^n$$

$$\geq \binom{n}{2} x_n^2 \qquad \text{da alle Terme} \geq 0$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

$$\Rightarrow x_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \qquad (\text{für } n \geq 2)$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$0$$

$$\Rightarrow x_n^2 \to 0$$

$$\Rightarrow x_n \to 0$$

[man überlege sich: $x_n \not\to 0 \Rightarrow x_n^2 \not\to 0$] $\square$

5.19 Korollar: Sei $a > 0$. Dann konvergiert $\sqrt[n]{a}$ gegen 1.

Beweis: $a \geq 1$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & \sqrt[n]{a} & \leq & \sqrt[n]{n} \quad \text{für } n > a \\ \downarrow & & & & \downarrow \; n \to \infty \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$

$$\overset{4.19}{\Rightarrow} \sqrt[n]{a} \to 1$$

$a \leq 1$: dann $\frac{1}{a} \geq 1$, also $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \longrightarrow 1$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$$

□

5.20 Bemerkung: Vollständigkeitsaxiom erlaubt Darstellung reeller Zahlen durch b-adische Brüche.

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

Ein b-adischer Bruch ist Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$$

mit $k \geq 0$ und $a_n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq a_n < b$

Man schreibt (für festes b) üblicherweise

$$\pm a_{-k} \dots a_{-1} a_0 . a_1 a_2 a_3 \dots$$

$b = 10$: Dezimalbruch

$b = 2$: dyadischer Bruch

Es gilt:

(i) Jeder b-adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar, konvergiert also gegen eine reelle Zahl

(ii) Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Dann lässt sich jede reelle Zahl in einen b-adischen Bruch entwickeln.

(iii) Die Darstellung ist nicht eindeutig, Mehrdeutigkeit ist aber nur von der Form:

$$\ldots . a_1 \ldots a_n (b-1)(b-1)(b-1)\ldots$$

$$= \ldots . a_1 \ldots (a_n+1) 0 0 0 \ldots$$