6. Konvergenzkriterien für Reihen

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\rightsquigarrow$ Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$\hat{=}$ Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ Partialsumme

6.1. Satz (Cauchy-Kriterium): Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m \geq n \geq N : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis: $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ Konvergenz von (s_n)

$\overset{5.3, 5.4}{\Longleftrightarrow}$ (s_n) ist Cauchy-Folge

Da $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$, ist 6.1. genau Cauchy-Kriterium für (s_n)

$\square$

6.2. Satz: Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

<u>Beweis</u>: $|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+1} a_n|$

$6.1. \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n+1 \geq n \geq N: \; |a_{n+1} - 0| < \varepsilon$

d.h. $a_n \to 0$ $\square$

<u>6.3 Bemerkung</u>: Wie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ zeigt, gilt die Umkehrung nicht.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist zwar notwendig, aber <u>nicht</u> hinreichend für Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\downarrow$

<u>6.4. Satz</u>: Eine Reihe $\sum a_n$ mit $a_n \geq 0 \; \forall n$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen beschränkt ist.

<u>Beweis</u>: (s_n) ist monoton wachsend,

da $s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$

monotone Folge ist konvergent $\underset{\substack{5.15\\4.12}}{\Longleftrightarrow}$ beschränkt $\square$

<u>6.5. Beispiele</u>: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht,

da $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_n$ unbeschränkt, siehe 4.26

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}}$$

$$\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}}$$

$$= \frac{n-1}{n} \leq 1$$

$$\leq 2$$

$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)_n$ beschränkt durch 2

$\frac{1}{k^2} \geq 0 \quad \forall k$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert

Den Wert der Reihe $\left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$ können wir im Augenblick noch nicht bestimmen!

<u>6.6. Satz (Majorantenkriterium)</u>: Ist $|a_n| \leq |c_n|$ für $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

<u>Beweis:</u> $\sum a_n$ konvergiert nach 6.1. gdw

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \text{für } m \geq n \geq N$$

nun gilt:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{|a_k|}_{\leq |c_k|} \qquad (\Delta\text{-Ungl.}, 3.1)$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|$$

$$< \varepsilon \qquad \text{für } n, m \text{ hinreichend groß}$$

$$\Big(\text{da } \sum_k |c_k| \text{ konvergiert}\Big)$$

d.h. $\sum_n a_n$ konvergiert

Sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n := \sum_{k=1}^{n} |c_k|$

dann: $|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$$

$$\overset{4.19}{\Longrightarrow} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \qquad \square$$

6.7. Bemerkung: Wir haben benutzt:

$$a_n \to a \quad \Rightarrow \quad |a_n| \to |a|$$

Dies folgt aus inverser Dreiecksungleichung:

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x-y|$$

$$\big|\, |a_n| - |a| \,\big| \leq |a_n - a| \to 0$$

6.8. Definition: Eine Reihe $\sum a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

6.9. Bemerkung: 1) Jede absolut konvergente Reihe konvergiert, da $\sum |a_n|$ Majorante ist.

2) Aber nicht umgekehrt; z. B.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \quad \text{konvergiert (zu } \ln 2),$$

ist aber nicht absolut konvergent, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

6.10. Satz (Quotientenkriterium):

Betrachte Reihe $\sum a_n$.

1) Falls ein $0 < \Theta < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \Theta \qquad \forall\, n \geq n_0$$

dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

2) Falls ein $\Theta \geq 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq \Theta \qquad \forall n \geq n_0,$$

dann divergiert $\sum a_n$.

<u>Beweis:</u> Genügt Konvergenz / Divergenz von $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ zu betrachten.

1) $\Theta < 1$: $|a_{n_0+k}| = |a_{n_0}| \cdot \underbrace{\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right|}_{\leq \Theta} \cdots \underbrace{\left|\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}}\right|}_{\leq \Theta}$

$$\leq |a_{n_0}| \cdot \Theta^k =: c_k$$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ ist Majorante für $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{n_0+k}|$

$$\| $$

$$|a_{n_0}| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Theta^k = |a_{n_0}| \cdot \frac{1}{1-\Theta}$$

geometr. Reihe

$\overset{6.6}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{n_0+k}|$ konvergent

2) $\Theta \geq 1$: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \Theta \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |a_n| > 0$

$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_0}| \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\overset{6.2}{\Longrightarrow} \sum a_n$ konvergiert nicht $\square$

6.11. Bemerkung: 1) Daraus folgt direkt:

Sei (a_n) so, dass $\alpha = \lim \frac{|a_{n+1}|}{a_n}$ existiert.

Falls $\alpha < 1$, so konvergiert $\sum a_n$ absolut

Falls $\alpha > 1$, so divergiert $\sum a_n$

2) Für $\alpha = 1$ kann man nichts aussagen!

z.B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, und $\alpha = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, und $\alpha = 1$

6.12. Satz (Wurzelkriterium):

Betrachte Reihe $\sum a_n$.

1) Falls ein $0 < \Theta < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta \quad \forall\, n \geq n_0,$$

dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

2) Falls ein $(\Theta \geq 1$ und$)$ $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|}\ (\geq \Theta) \geq 1 \quad \forall\, n \geq n_0,$$

dann divergiert $\sum a_n$.

<u>Beweis:</u> 1) genügt $\sum_{n \geq n_0} a_n$ zu betrachten

$n \geq n_0: \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq \Theta$

$\Rightarrow \quad |a_n| \leq \Theta^n$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \Theta^n$ konvergente Majorante

2) $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \Rightarrow |a_n| \geq 1 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge

$\overset{6.2.}{\Rightarrow} \sum a_n$ divergiert $\square$

<u>6.13. Bemerkung:</u> 1) Daraus folgt:

Sei $\sum a_n$ Reihe, so dass

$$\beta := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

existiert.

Falls $\beta < 1$, so konvergiert $\sum a_n$ absolut

Falls $\beta > 1$, so divergiert $\sum a_n$

2) Für $\beta = 1$ kann man nichts aussagen!

z.B. $\beta = 1$ für konvergente $\sum \frac{1}{n^2}$

und für divergente $\sum \frac{1}{n}$

3) ~~Wurzelkriterium ist stärker als Quotienten-kriterium~~

6.14. Satz über alternierende Reihen:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0 \;\forall n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

<u>Beweis:</u> $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i$ Partialsumme

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$$

da (a_n) monoton fallend

$\Rightarrow s_{2n} \leq s_{2n+2} \quad \forall n$

$\Rightarrow (s_{2n})$ monoton wachsend

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$$

$\Rightarrow s_{2n+1} \leq s_{2n-1}$

$\Rightarrow (s_{2n-1})$ monoton fallend

Außerdem

$$s_{2n+1} - s_{2n} = +a_{2n+1} \geq 0$$

d.h. $s_{2n+1} \geq s_{2n}$

also: $s_1 \geq s_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$

Somit: (s_{2n}) monoton wachsend und beschränkt: $s_2 \leq s_{2n} \leq s_1 \quad \forall n$

$\overset{5.15}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} =: s$ existiert

(s_{2n-1}) monoton fallend und beschränkt

$$s_2 \le s_{2n+1} \le s_1$$

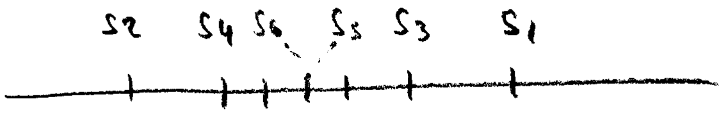
$$\overset{5.15}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} =: s' \text{ existiert}$$

$$\begin{array}{ccc} s_{2n} & \le & s_{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ s & & s' \end{array} \qquad \Rightarrow \quad s \le s'$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 \le s' - s & \le & s_{2n+1} - s_{2n} & = & a_{2n+1} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad s' = s$$

d.h. $s_n \longrightarrow s$



$\square$

6.15. Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergiert

(aber nicht absolut, da $\sum \frac{1}{n} = +\infty$)

6.16. Definition: Eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, heißt **bedingt konvergent**.