8. Teilmengen von $\mathbb{R}$

8.1. Definition: Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$x \leq k \quad (\text{bzw. } x \geq k) \quad \forall x \in D$$

D heißt beschränkt, wenn D nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h. wenn

$$\exists M \geq 0 \quad \forall x \in D: \quad -M \leq x \leq M$$

$$(\text{d.h. } |x| \leq M)$$

8.2. Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$.

1) Eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ heißt Supremum oder kleinste obere Schranke zu D, falls
   (a) k ist obere Schranke (d.h. $x \leq k \ \forall x \in D$)
   (b) falls k' obere Schranke, so ist $k' \geq k$

2) Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ heißt Infimum oder größte untere Schranke zu D, falls
   (a) L ist untere Schranke (d.h. $x \geq L \ \forall x \in D$)
   (b) falls L' untere Schranke, so ist $L' \leq L$

Falls Supremum oder Infimum existiert, so ist es eindeutig (folgt aus (b))

8.3. Satz (Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$):

Jede nichtleere, nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

8.4. Bemerkung: Es gilt sogar: Äquivalent sind

(1) Vollständigkeitsaxiom

(2) Intervallschachtelungs-Prinzip

(3) Supremumseigenschaft

Beweis von 8.3.: für Supremum

Wir konstruieren induktiv Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$, so dass gilt:

- b_n obere Schranke von D
- a_n nicht obere Schranke von D
- $b_n - a_n = 2^{-n}$

Sei m die kleinste Zahl in $\mathbb{Z}$, so dass m obere Schranke für D ist (also $m-1$ keine obere Schranke)

Setze $a_0 := m-1$

$b_0 := m$

Sei $[a_n, b_n]$ konstruiert; setze dann

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] & \text{falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ keine ob. Schr.} \\ [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] & \text{— \,,\, — obere Schranke} \end{cases}$$

also: $a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le b_n \le \dots \le b_2 \le b_1 \le b_0$

d.h. (a_n), (b_n) monotone, beschränkte Folgen

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existieren und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: s$$

(da $b_n - a_n = 2^{-n} \to 0$)

(alternativ: $\{s\} = \bigcap\limits_n [a_n, b_n]$)

<u>Bew</u>: s ist Supremum von D

da (a) $x \in D \Rightarrow x \le \underset{\displaystyle s}{\underset{\downarrow}{b_n}} \quad \forall n$

$\Rightarrow x \le s$ d.h. s obere Schranke

(b) Sei k' obere Schranke

$\Rightarrow k' \ge \underset{\displaystyle s}{\underset{\downarrow}{a_n}} \quad \forall n$

$\Rightarrow k' \ge s$ d.h. s kleinste obere Schranke

$\square$

<u>8.5. Bezeichnungen</u>: $\sup D :=$ Supremum von D

$\inf D :=$ Infimum von D

Falls $\sup D \in D$, so heißt $\sup D$ <u>Maximum</u> von D

Falls $\inf D \in D$, — " — $\inf D$ Minimum — " —

Falls D nicht nach oben beschränkt (bzw. nicht nach unten beschränkt), so schreiben wir $\sup D = +\infty$ bzw. $\inf D = -\infty$

<u>8.6. Bemerkungen:</u> 1) Falls sup D existiert, so muß nicht unbedingt $\sup D \in D$ gelten; aber Beweis von 8.3 zeigt: $\exists\, x_n \in D : x_n \to \sup D$ (denn: jedes $[a_n, b_n]$ enthält Element von D, wähle solches $x_n \in [a_n, b_n]$, $x_n \in D$

$a_n \le x_n \le b_n \implies x_n \to s = \sup D$

2) Falls $\sup D = +\infty$, dann $\exists\, x_n \in D$ mit $x_n \to +\infty$

Falls $\inf D = -\infty$, dann $\exists\, x_n \in D$ mit $x_n \to -\infty$

<u>8.7. Beispiele:</u> 1) $I = [a,b]$, $\sup I = b$ ist Maximum

2) $I = [a,b)$, $\sup I = b$ ist kein Maximum

3) $D = \{\sqrt[n]{n} \mid n \ge 2\}$ $\inf D = 1$, kein Minimum

<u>8.8. Definition:</u> Sei (a_n) Folge reeller Zahlen. Dann definieren wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k \mid k \ge n\})_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k \mid k \ge n\})_n$$

Dabei sind $\pm\infty$ als mögliche Werte zugelassen.

8.9. Bemerkung: 1) Setze

$y_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$

$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend

(oder identisch $= \infty$), daher

existiert $\lim y_n$ (eventuell $= \pm\infty$)

analog für lim inf.

$x_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

(oder identisch $= -\infty$

$\Rightarrow \lim x_n$ existiert (eventuell $= \mp\infty$)

2) Da $x_n \leq y_n \quad \forall n$

$\Rightarrow \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

8.10. Beispiele: 1) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$

2) $a_n = (-1)^n \cdot n$

$\limsup a_n = +\infty$, $\liminf a_n = -\infty$

8.11. Definition: Sei (a_n) Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von (a_n), falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n) gilt mit

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$$

8.12. Satz: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann ist $\limsup_{n \to \infty} a_n$ der größte und $\liminf_{n \to \infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt von (a_n).

Beweis: Wir zeigen nur Aussage für lim sup.

(i) Beh: lim sup a_n ist Häufungspunkt

denn: $y_k \to \limsup a_n$ für $k \to \infty$

(Beachte: (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ $y_k \neq \pm\infty$ und $\limsup a_n \neq \pm\infty$)

$y_k = \sup \{a_n \mid n \geq k\}$

$\Rightarrow \exists\, n \geq k : \; y_k - \frac{1}{k} \leq a_n \leq y_k$

$\rightsquigarrow$ wähle Folgen $k_1 \leq n_1 < k_2 \leq n_2 < k_3 \leq n_3 < \dots$ mit

$$\begin{array}{ccccc} y_{k_\ell} - \frac{1}{k_\ell} & \leq & a_{n_\ell} & \leq & y_{k_\ell} \\ \downarrow & & & & \downarrow \; \ell \to \infty \\ \limsup a_n & & & & \limsup a_n \end{array} \quad \Rightarrow a_{n_\ell} \xrightarrow{\ell \to \infty} \limsup a_n$$

(ii) Beh: lim sup ist größter Häufungspkt

denn: Sei $a \in \mathbb{R}$ Häufungspkt von (a_n)

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \to a$

nun gilt $y_{n_k} \geq a_{n_k} \quad \forall k$

$$\begin{array}{ccc} y_{n_k} & \geq & a_{n_k} \\ \downarrow & & \downarrow \; k \to \infty \\ \limsup & & a \end{array}$$

$\Rightarrow \limsup a_n \geq a$ $\square$

<u>8.13. Satz:</u> Eine beschränkte Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Es gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

<u>Beweis</u>: (i) Sei lim sup = lim inf.

Sei $y_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$

$x_n := \inf$ —"—

$$\Rightarrow \quad x_n \leq a_n \leq y_n \quad \forall n$$

$$\begin{array}{ccc} x_n & & y_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \liminf & & \limsup \end{array}$$

$\Rightarrow$ lim a_n existiert und = lim inf

(ii) Sei (a_n) konvergent mit $a_n \to a$

Dann konvergiert jede Teilfolge gegen a,

$\overset{8.12}{\Longrightarrow} \limsup a_n = a$ und $\limsup a_n = a$ $\square$

8.14. Bemerkung: Es gilt für $a \in \mathbb{R}$:

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = a$$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

(i) $a_n < a + \varepsilon$ für alle bis auf endl. viele n

und

(ii) $a_m > a - \varepsilon$ für unendlich viele m

Analog für lim inf