9. Funktionen, Stetigkeit

9.1. Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}$

Eine reelle (oder reellwertige) Funktion auf D ist eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R}$$

D heißt Definitionsbereich von f

Der Graph von f ist

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$$

9.2. Beispiele: 1) $f(x) = c \quad \forall x \in D$

$(c \in \mathbb{R}$ fest$)$

2) $f(x) = x$, d.h. $f = id_D$ 3) $f(x) = |x|$

4) $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

5) $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D = [0, \infty)$

6) Polynomfunktion: $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

7) rationale Funktion: Seien p, q Polynomfktn
$D \subseteq \{x \mid q(x) \neq 0\}$. Setze $f(x) := \frac{p(x)}{q(x)} \; \forall x \in D$

8) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

9.3 Def.: Seien f, g Fkten auf D und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch

$$f+g, \quad \lambda f, \quad f \cdot g$$

Fkten auf D, definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, dann ist auch

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

Funktion auf D.

9.4. Def.: Seien

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g : E \to \mathbb{R}$$

mit $f(D) \subset E$.

Dann ist

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \quad g \circ f(x) := g(f(x))$$

Funktion auf D

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & E \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

9.5. Beispiel: Sei

$$\sqrt{\cdot} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

Dann ist $\sqrt{\cdot} \circ q = |\cdot|$, wobei

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x|$$

9.6. Def.: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit

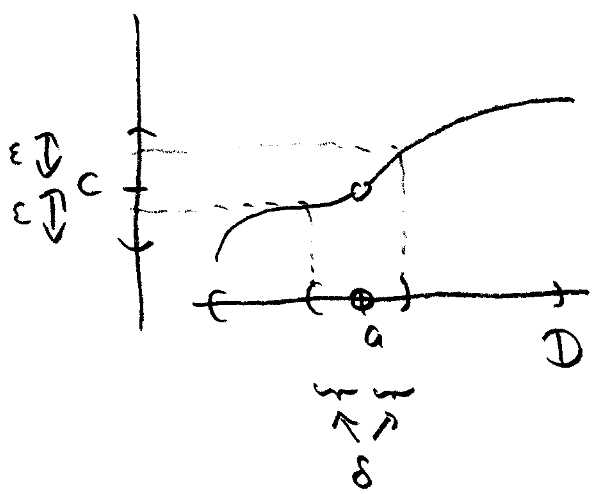
$$\forall \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$$

Wir schreiben $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \{x \in D \mid |x-a| < \delta\} :$$

$$|f(x) - c| < \varepsilon$$



a kann in D liegen, muß aber nicht

<u>9.7. Satz</u>: Seien f, D, a, c wie in 9.6.

Dann ist $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ genau dann, wenn

für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit

$x_n \to a$ gilt: $f(x_n) \to c$

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" Sei $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to a$

z.z.: $f(x_n) \to c$

Sei $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, |x-a| < \delta : |f(x) - c| < \varepsilon$

Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_n - a| < \delta \quad \forall n \geq N$$

also gilt für alle $n \geq N$: $|x_n - a| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_n) - c| < \varepsilon$

also: $f(x_n) \to c$

"$\Leftarrow$": Sei für jede Folge (x_n) in D:

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to c$$

z.z.: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

Beweis durch Widerspruch:

Nimm an $\lim_{x \to a} f(x) = c$ gilt nicht, d.h.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D, |x-a| < \delta : |f(x) - c| \geq \varepsilon$

Somit gibt es für dieses $\varepsilon > 0$ für jedes $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in D$ mit

$|x_n - a| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - c| \geq \varepsilon$

also:

$|x_n - a| < \frac{1}{n} \ \forall n \implies x_n \to a$

$|f(x_n) - c| > \varepsilon \ \forall n \implies f(x_n) \not\to c$

Wdsp

$\square$

9.8 Notationen: Wir benutzen auch folgende Notationen: (hier für $D = \mathbb{R}$; analog für allgemeines D)

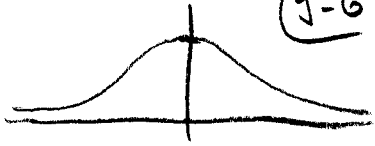
$\lim_{x \to \infty} f(x) = c :\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R} \ \forall x > k : |f(x) - c| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c :\iff$ — " — $\forall x < k$ — " —

$\lim_{x \nearrow a} f(x) = c :\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (a-\delta, a) : |f(x) - c| < \varepsilon$

$\lim_{x \searrow a} f(x) = c :\iff$ — " — $\forall x \in (a, a+\delta) :$ — " —

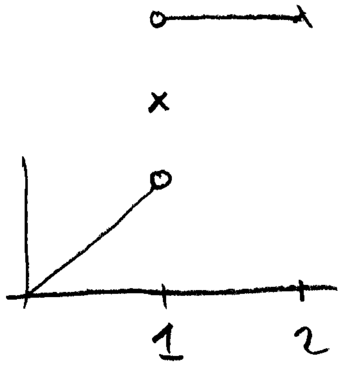
9.9. Beispiele: 1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \;, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

2) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 3 & 2 \geq x > 1 \end{cases}$

$D = [0, 2]$



$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 1 \;, \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = 2$$

9.10. Def: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$

f ist <u>stetig in a</u> $:\Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

f ist <u>stetig</u> (auf D) $:\Longleftrightarrow$ f ist stetig in jedem $b \in D$

9.11 Bem: f stetig in a

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D, |x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$\overset{9.7}{\Longleftrightarrow}$ Für jede Folge (x_n) in D:

$$x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$$

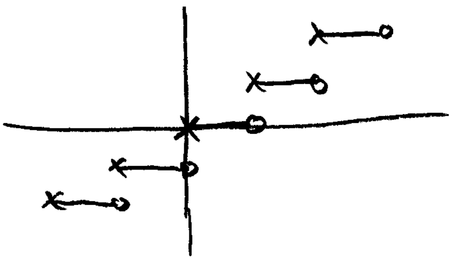
9.12. Beispiele: 1) $f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R})$

ist stetig auf jedem $D \subset \mathbb{R}$

2) $f(x) = x$ stetig auf jedem $D \subset \mathbb{R}$

denn: $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) = x_n \to a = f(a)$

3) Sei $f(x) = [x] :=$ größte ganze Zahl kleiner gleich x



f ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

4) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

denn: (i) Betrachte $a = 0$, $\exp(0) = 1$

Sei $x_n \to 0$, z.z.: $\exp(x_n) \to 1$

Betrachte n hinr. groß, so dass $|x_n| \leq 1$,

dann gilt (7.20, für $N = 0$)

$$|\exp(x_n) - 1| \leq 2 \cdot |x_n| \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow |\exp(x_n) - 1| \to 0$$

$$\Rightarrow \exp(x_n) \to 1$$

(ii) Betrachte nun beliebiges $a \in \mathbb{R}$

Sei $x_n \to a$, z.z.: $\exp(x_n) \to \exp(a)$

$$|\exp(x_n) - \exp(a)| = |\underbrace{\exp(a+y_n)}_{\overset{7.17}{=} \exp(a)\cdot\exp(y_n)} - \exp(a)|$$

$y_n := x_n - a$

$$= |\exp(a)| \cdot \underbrace{|\exp(y_n) - 1|}_{\to 0 \text{ nach (i)}}$$

da $y_n \to 0$

<u>9.13 Satz</u>: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Sind f und g stetig in $a \in D$,

dann auch $f+g$, $f \cdot g$, λf

Falls $g(x) \neq 0 \; \forall x \in D$, dann ist

auch f/g stetig in a.

<u>Beweis</u>: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to a$

$\overset{f \text{ stetig}}{\underset{g \text{ stetig}}{\Longrightarrow}}$ $f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(a)$

$$\Rightarrow (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a)$$
$$= (f+g)(a)$$

Rest analog

(alles wird auf entsprechende Ergebnisse für Folgen zurückgeführt $\to$ 4.14, 4.15, 4.17) $\square$

9.14. Korollar: 1) Jede Polynomfunktion ist auf jedem $D \subset \mathbb{R}$ stetig.

2) Jede rationale Funktion $\frac{f}{q}$ ist auf jedem $D \subset \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ stetig.

9.15. Satz: Seien

$$f : D \to E \;, \; g : E \to \mathbb{R}$$

stetig. Dann ist auch

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}$$

stetig.

Beweis: Sei (x_n) in D mit $x_n \to a \in D$.

$$\overset{f \text{ stetig}}{\underset{\text{in } a}{\Longrightarrow}} \quad f(x_n) \to f(a) \in E$$

$$\overset{g \text{ stetig}}{\underset{\text{in } f(a)}{\Longrightarrow}} \quad \underbrace{g(f(x_n))}_{g \circ f(x_n)} \to \underbrace{g(f(a))}_{g \circ f(a)}$$

$\square$