UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 0
zur mündlichen Bearbeitung in der ersten Übungswoche
Die Aufgaben werden nicht bewertet.

Aufgabe 1. Rekapitulieren Sie die Begriffe "punktweise Konvergenz" und "gleichmäßige Konvergenz" von Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ sind.

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ und seien die Funktionen f_n alle stetig. Was wissen Sie dann über die Funktion f?

(b) Zeigen Sie, dass aus gleichmäßiger Konvergenz von Folgen von Funktionen schon punktweise Konvergenz folgt.

(c) Finden Sie ein Beispiel einer Folge von Funktionen, die punktweise konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

Aufgabe 2. Wiederholen Sie, dass der Raum der stetigen Funktionen

$$\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

mit der Supremumsnorm ein normierter Vektorraum ist. Zeigen Sie, dass sich einige der Gesetze über Folgen reeller Zahlen einfach auf den Raum $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|)$ übertragen lassen. Seien dafür $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei (bzgl der Supremumsnorm) konvergente Folgen von Funktionen in $\mathcal{C}[0,1]$ mit Grenzwerten f bzw. g in $\mathcal{C}[0,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass auch die Folge $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und geben Sie deren Grenzwert an.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, das heißt es gibt ein $K > 0$, so dass $\|f_n\| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass auch die Folge $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und geben Sie deren Grenzwert an.

Die Aussagen (a) und (b) gelten für *alle* normierten Vektorräume.