UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 1
Abgabe: Donnerstag, 21.4.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Betrachten Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \sqrt[n]{x}, \quad \text{für } x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert und berechnen Sie diese.

(b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$. Konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ und konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $g : [0,1] \to \mathbb{C}$.
Ist dann $f = g$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Auf dem Vektorraum $\mathcal{C}^1[0,1]$ der einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ werde folgende Norm eingeführt:

$$\|f\|_{(1)} := \sup\left\{|f(x)| + |f'(x)| \;\middle|\; x \in [0,1]\right\}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^1[0,1]$ bzgl. dieser Norm vollständig ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge monoton wachsender Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann sogar gleichmäßig gegen f konvergiert.
Zusatz **(+ 5 Punkte*).** Ist die Aussage auch ohne die Monotonie der Funktionen f_n wahr? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Wir definieren auf $\mathbb{R}^m$ die *euklidische Norm*:

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x^{(1)}|^2 + \ldots + |x^{(m)}|^2} \qquad \text{wobei } x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) \in \mathbb{R}^m$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^m$ und sei $x \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2 = 0 \qquad \iff \qquad \forall k = 1, \ldots, m \;:\; \lim_{n\to\infty} |x_n^{(k)} - x^{(k)}| = 0$$

(In $\mathbb{R}^m$ konvergieren Folgen also genau dann bzgl. $\|\cdot\|_2$, wenn sie komponentenweise konvergieren.)