UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 2
Abgabe: Donnerstag, 28.4.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in V, die gegen x bzw. y in V konvergieren.

(a) Zeigen Sie, dass die inverse Dreiecksungleichung gilt:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in V$$

Insbesondere konvergiert also $\|x_n\| \to \|x\|$, falls (x_n) gegen x konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x + y$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, das heißt es gibt ein $K > 0$, so dass $\|x_n\| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $0 < p < \infty$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\|_p := \sqrt[p]{|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_n|^p}$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, für $p \geq 1$. Warum funktioniert das nicht für $0 < p < 1$?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass $\rho(x, y) := |e^x - e^y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ und für jedes $0 \leq C < 1$ die Differentialgleichung

$$f'(x) = \sin(f(x))$$

genau eine stetig differenzierbare Lösung $f : [0, C] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = a$ besitzt.

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei V ein K-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf V heißen *äquivalent*, falls $b, c > 0$ existieren mit

$$b\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x\|_1 \qquad \text{für alle } x \in V$$

(a) Zeigen Sie, dass eine Folge (x_n) in V genau dann bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen $x \in V$ konvergiert, wenn sie bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen $x \in V$ konvergiert.

(b) Betrachten Sie folgende drei Normen auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \qquad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende Aussage:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Die Normen $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_1$ sind also äquivalent. Nach (a) und nach Aufgabe 5 von Blatt 1 wissen Sie somit, dass eine Folge in $\mathbb{R}^n$ genau dann bzgl. einer dieser drei Normen konvergiert, wenn sie komponentenweise konvergiert.