UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2011

Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 5.5. 2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass jeder Vektorraum V mit einem Skalaprodukt die *Parallelogrammidentität* erfüllt (wobei $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \text{für } x, y \in V$$

(b) Benutzen Sie (a), um zu zeigen, dass die Supremumsnorm auf $\mathcal{C}[0,1]$ nicht von einem Skalarprodukt kommt (dh. die Supremumsnorm kann nicht als $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ geschrieben werden).

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei X die Menge aller 0-1-Folgen, dh. aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \{0,1\}$. Für zwei Folgen (x_n) und (y_n) setze $d((x_n),(y_n)) := 2^{-k}$, wobei k die größte natürliche Zahl ist, für die $x_n = y_n$ für alle $n < k$.

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X definiert.

(b) Sei $T : X \to X$ definiert durch $T((x_n)) := (x'_n)$, wobei $x'_n = x_{n-1}$ für $n \geq 1$ und $x'_0 = 1$. Zeigen Sie, dass T kontrahierend ist.

(c) Was ist der eindeutig bestimmte Fixpunkt von T?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $\Phi(x) := \frac{x}{1+|x|}$. Wir definieren $d(x,y) := |\Phi(x) - \Phi(y)|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Betrachten Sie den Raum $\mathbb{R}^2$ mit dem euklidischen Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i \qquad \text{wobei } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

(a) Beschreiben Sie alle Einheitsvektoren (dh. Vektoren mit Norm 1) mit Hilfe der Funktionen sin und cos.

(b) Wir sagen, dass zwei Vektoren x und y *orthogonal* sind, wenn $\langle x, y\rangle = 0$ ist. Geben Sie alle Einheitsvektoren an, die zum Vektor $(1, 0)$ orthogonal sind.

(c) Geben Sie alle Einheitsvektoren an, die zu einem gegebenen Einheitsvektor $x \in \mathbb{R}^2$ orthogonal sind.

(d) Zeigen Sie, dass $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\varphi$, wobei φ den Winkel zwischen den Vektoren x und y angibt

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktionen $f_n \in \mathcal{C}[0, 1]$ gegeben durch

$$f_n(t) := \cos(2\pi nt) + i \sin(2\pi nt) \qquad \text{für } t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie, dass $\langle f_n, f_m\rangle = 0$ falls $m \neq n$ und dass $\langle f_n, f_n\rangle = 1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein *orthonormales System* auf $(\mathcal{C}[0, 1], \langle\cdot, \cdot\rangle)$ bildet.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass der Raum

$$E = \{(a_n)_{n\in\mathbb{R}} \mid a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert}\} \qquad \text{mit} \qquad \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$$

ein Banachraum ist. (Zeigen Sie dabei auch, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist.)