UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 4
Abgabe: Donnerstag, 12.5.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ offen sind bzgl. der euklidischen Metrik.

(a) $\{(x,y) \bigm| -1 < x < 1 \text{ und } -1 < y < 1\}$

(b) $\{(x,y) \bigm| x > y\}$

(c) $\bigcup_{n=0}^{\infty} \big\{(x,y) \bigm| \max(|x|,|y|) \leq 1 - \frac{1}{n}\big\}$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ abgeschlossen sind bzgl. der von der Supremumsnorm induzierten Metrik.

(a) $\{f \mid f(t_0) = \alpha\}$ wobei $t_0 \in [0,1]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ fest sind.

(b) $\{f \mid \alpha \leq f(t) \leq \beta \text{ für alle } t \in [0,1]\}$ wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ feste Zahlen sind.

(c) $\{f \mid f \text{ hat eine Nullstelle}\}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(a) Sei X vollständig. Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn A vollständig ist.

(b) Sei X kompakt. Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn A kompakt ist.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass endliche Vereinigungen und endliche Schnitte kompakter Teilmengen von X wieder kompakt sind.
Ist die Aussage auch noch wahr für unendliche Vereinigungen? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Wir setzen

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Sei A folgenkompakt, B abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann $d(A, B) > 0$ gilt.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei X ein kompakter metrischer Raum. Sei Y ein metrischer Raum und sei $f : X \to Y$ eine stetige, bijektive Funktion. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion f^{-1} stetig ist. Zeigen Sie auch, dass die Aussage falsch ist, wenn X nicht kompakt ist.