



Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 19.5.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte). Beweisen Sie folgenden Schritt aus dem Satz von Borel-Lebesgue (zu (2) $\Rightarrow$ (1)): Sei X ein folgenkompakter metrischer Raum und sei $\{U_i \mid i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X . Zeigen Sie, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass es zu jedem $x \in X$ ein $i \in I$ gibt mit $B(x, r) \subseteq U_i$.

(Diese Aussage wird benötigt, um zu zeigen, dass Folgenkompaktheit Kompaktheit in metrischen Räumen impliziert – Sie dürfen also nicht die Äquivalenz der beiden Begriffe benutzen!)

Aufgabe 2 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ eines metrischen Raumes einen nichtleeren, kompakten Durchschnitt hat.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Die *Cantormenge* $C \subset [0, 1]$ ist wie folgt definiert:

Sei $C_0 := [0, 1]$, $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \dots$

Die Menge C_{n+1} entsteht hierbei aus C_n durch Entfernen des mittleren offenen Drittels jedes Intervalls aus C_n . Setze $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

Zeigen Sie, dass C kompakt und überabzählbar ist. Zeigen Sie außerdem, dass das Innere C° von C leer ist. (Hierbei ist das Innere einer Menge A definiert als die Vereinigung aller offenen Mengen $U \subset A$.)

bitte wenden

Erinnerung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die offenen Mengen in einem metrischen Raum eine Topologie bilden (Satz 3.4 und Bemerkung 3.5). Die Struktur einer Topologie lässt sich auch unabhängig von einer Metrik definieren:

Sei X eine Menge und sei $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X , also eine Menge von Teilmengen von X . τ heißt dann *Topologie* auf X , falls

- (i) $\emptyset, X \in \tau$
- (ii) $U, V \in \tau \implies U \cap V \in \tau$ (“ τ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten”)
- (iii) $U_i \in \tau$ für $i \in I \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ (“ τ ist abgeschl. unter beliebigen Vereinigungen”)

Die Elemente einer Topologie heißen *offene Mengen*; eine Teilmenge von X heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist; (X, τ) heißt *topologischer Raum*.

Analog zu Definition 4.1 heißt eine Menge in einem topologischen Raum *kompakt*, wenn jede ihrer offenen Überdeckungen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen (X, τ) und (Y, σ) heißt *stetig*, falls $f^{-1}(V) \in \tau$ für alle $V \in \sigma$ (“Urbilder offener Mengen sind offen”) oder äquivalent, falls die Urbilder aller abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind. (In metrischen Räumen ist das genau der bekannte Stetigkeitsbegriff, siehe Satz 3.12.)

Aufgabe 4 (20 Punkte!). Sei X eine Menge und $\tau := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass τ eine Topologie auf X ist.
- (b) Zeigen Sie, dass τ die diskrete Topologie ist (dh. $\tau = \mathcal{P}(X)$), wenn X endlich ist.
- (c) Zeigen Sie, dass X kompakt ist.
- (d) Charakterisieren Sie alle abgeschlossenen Mengen in X .
- (e) Charakterisieren Sie alle kompakten Mengen in X .
- (f) Sei $U \subseteq X$ offen. Berechnen Sie den Abschluss von U .
- (g) Charakterisieren Sie alle stetigen Funktionen $f : X \rightarrow X$.

Bemerkung: Diese Topologie wird *nicht* von einer Metrik induziert, dh. “ $B(x, \varepsilon)$ ” macht hier keinen Sinn. Auch gelten viele Sätze über metrische Räume *nicht* in X , insbesondere ist Satz 3.6 oder Satz 4.5 nicht anwendbar.