UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 6
Abgabe: Donnerstag, 26.5.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie Bemerkung 5.7 der Vorlesung: Der Abschluss $\bar{A}$ einer gleichgradig stetigen Teilmenge $A \subset \mathcal{C}[0,1]$ ist wieder gleichgradig stetig.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass *alle* Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind (siehe auch Blatt 2, Aufgabe 5). Gehen Sie dabei wie folgt vor: Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und sei $\|\cdot\|_1$ die Norm, definiert durch

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

(a) Zeigen Sie, dass es ein $c > 0$ gibt, so dass $\|x\| \leq c\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(Schreiben Sie dafür $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i-te kanonische Einheitsvektor ist.)

(b) Zeigen Sie, dass $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $b > 0$ gibt, so dass $b\|x\|_1 \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(Zeigen Sie, dass das Bild von A unter der Funktion $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ein Minimum besitzt.)

(d) Folgern Sie, dass zwei beliebige Normen äquivalent sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\gamma : [1, a] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve, definiert durch $\gamma(t) := (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$. Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie ihre Länge.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Zwei Ameisen krabbeln eine Dose mit Radius 5cm hoch. Dabei nimmt die erste einen direkten, senkrechten Weg entlang einer Seite (im Lot), die andere krabbelt in einer gleichmäßigen Schraube einmal um die Dose herum. Beide Ameisen beginnen am gleichen Punkt und enden am gleichen und benötigen die selbe Zeit.
Wie hoch muss die Dose sein, damit die zweite Ameise einen genau doppelt so langen Weg zurücklegt wie die erste?

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Spirale $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $\gamma(t) := (t\sin(\frac{1}{t}\pi), t\cos(\frac{1}{t}\pi))$ für $t \in (0,1]$ und $\gamma(0) := (0,0)$ *nicht* rektifizierbar ist.