UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 7
Abgabe: **Montag**, 6.6.2011, **8:30** Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $a > 0$. Geben Sie für die durch $y = \cosh x$ und $0 \le x \le a$ gegebene Kurve eine Darstellung mit der Bogenlänge als Parameter (also die "natürliche Parametrisierung" mit konstanter Geschwindigkeit 1).

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) := (\sin(xy), \cos(y))$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Funktionalmatrix $Df(x,y)$.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $(1,-2)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

(b) Besitzt f überall stetige partielle Ableitungen?

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = (1, x, x^2), \quad g(y_1,y_2,y_3) = (\sin y_1 - \cos y_2, e^{y_3}), \quad h(z_1,z_2) = z_1 z_2$$

Berechnen Sie die Ableitung von $h \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einmal mit Hilfe der Kettenregel sowie ein zweites Mal durch direktes Ableiten.

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** In der Physik beschreibt man die Wärmeverteilung ausgehend von einem Wärmepunkt im Nullpunkt des $\mathbb{R}^3$ in einem homogenen Medium (etwa Eisen) durch die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \Delta f(t,x)$$

Hierbei bezeichnet f die Wärme des Mediums an der Stelle $x \in \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt $t > 0$ und Δ den *Laplaceoperator*, gegeben durch $\Delta := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x,t) := t^{-3/2} \exp(-\frac{\|x\|^2}{4t})$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. ($\|\cdot\|$ bezeichne die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^3$)

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.** Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $f(x) = c$. Zeigen Sie, dass der Gradient grad $f(x)$ auf der Niveaufläche $N_f(c) := \{z \in U \mid f(z) = c\}$ senkrecht steht, dh. es gilt Folgendes:
Für jede stetig differenzierbare Kurve $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon > 0$, $\varphi(0) = x$ und $\varphi((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset N_f(c)$ gilt

$$\langle \dot\varphi(0), \mathrm{grad}\ f(x) \rangle = 0$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei K ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine abzählbare Teilmenge $Y \subseteq K$ existiert, so dass $\overline{Y} = K$. (Wir sagen dann, dass Y in K "dicht" ist).

Aufgrund einiger Feiertage wird die Vorlesung im Juni dreimal ausfallen: am 2.6. (Do), am 13.6. (Mo) und am 23.6. (Do). Daher werden die Übungsblätter 7 (dieses) und 8 eine längere Bearbeitungszeit haben und aus sechs statt fünf regulären Aufgaben bestehen.

Blatt 7 wird am 26.5. (Do) aus- und am 6.6. (Mo) abgegeben (anderthalb Wochen Bearbeitungszeit).

Blatt 8 wird am 6.6. (Mo) aus- und am 16.6. (Do) abgegeben (anderthalb Wochen Bearbeitungszeit).

An folgenden Tagen findet *kein* Übungsbetrieb statt: am 2.6. (Do), am 7.6. (Di), am 8.6. (Mi) sowie am 13.6. (Mo). Somit fällt rechnerisch genau eine Woche der Übungsbetrieb aus.

Wir wünschen allen frohe Feiertage!