**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

**Übungen zur Vorlesung Analysis II**
Sommersemester 2011

**Blatt 8**
**Abgabe:** Donnerstag, 16.6.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

---

**Aufgabe 1** (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f$ überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}(0,0)$$

gilt. Ist $f$ stetig in $(0,0)$?

**Aufgabe 2** (10 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in U$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $f + g$ ist in $x_0$ differenzierbar und es gilt $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(b) $fg$ ist in $x_0$ differenzierbar und es gilt $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.

(c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in $x_0$ differenzierbar und es gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

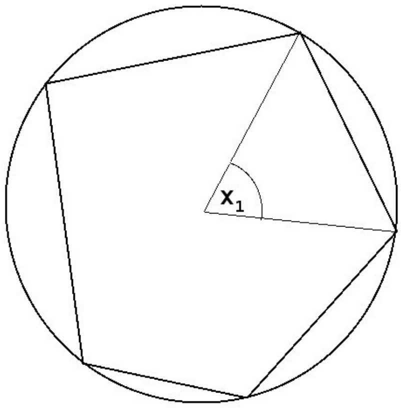
**Aufgabe 3** (10 Punkte)**.** Die Wirkung $W(x,t)$, die $x$ Einheiten eines Medikaments $t$ Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, wird in vielen Fällen durch $W(x,t) = x^2(a-x)t^2e^{-t}$ dargestellt, wobei $0 \leq x \leq a$ und $t \geq 0$.
Bestimmen Sie Dosis $x$ und Zeit $t$ so, dass die Wirkung $W(x,t)$ maximal ist.

**Aufgabe 4** (10 Punkte)**.** Geben Sie den nullten, den ersten und den zweiten Term der Taylorentwicklung von $f(x,y) = e^{x^2+y}$ um den Punkt $(0,0)$ an.

***bitte wenden***

**Aufgabe 5** (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie das dem Einheitskreis einbeschriebene $n$-Eck ($n \geq 3$) mit dem größten Flächeninhalt. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(a) Erläutern Sie, warum die Funktion $F_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_n(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sin x_i$ den Flächeninhalt des durch die Winkel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 2\pi$ (und $0 \leq x_i \leq \pi$) bestimmten $n$-Ecks beschreibt. (Hierbei sei $x_i$ der Winkel zwischen den Geraden, die den $i$-ten und den $(i+1)$-ten Eckpunkt jeweils mit dem Mittelpunkt des Einheitskreises verbinden.)




(b) Bestimmen Sie eine mögliche Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ für das Maximum der Funktion $F_n$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_i = 2\pi$ mit Hilfe des Lagrange-Multiplikators.

(c) Warum ist $F_n$ an der Stelle $x$ aus (b) wirklich maximal? Begründen Sie, für welches $x \in \mathbb{R}^n$ der Flächeninhalt des $n$-Ecks maximal ist und geben Sie eine geometrische Deutung Ihres Ergebnisses an.

**Aufgabe 6** (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob durch die Gleichungen

$$(a) \quad \begin{aligned} x + y - \sin z &= 0 \\ e^x - x - y^3 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad (b) \quad \begin{aligned} x + y - \sin z &= 0 \\ e^z - x - y^3 &= 1 \end{aligned}$$

in einem Umgebung von $x = 0$ zwei Funktionen $y(x), z(x)$ mit $y(0) = z(0) = 0$ definiert werden.

**Zusatzaufgabe*** (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es eine differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x, y) = \varphi(x + y)$.