UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 9
Abgabe: Mittwoch, 22.6.2011, **17:00** Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir identifizieren den Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ der reellen $n \times n$-Matrizen mit $\mathbb{R}^{n^2}$ und betrachten die differenzierbare Abbildung $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, gegeben durch $f(A) = A^2$ (Matrizenmultiplikation). Sei $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ die lineare Abbildung, die der Funktionalmatrix $Df(A)$ im Punkt A entspricht.
Zeigen Sie, dass $L(B) = AB + BA$ ist, für $B \in M_n(\mathbb{R})$. Folgern Sie, dass f in einer Umgebung U der Einheitsmatrix E_n umkehrbar ist, dh. für jede Matrix $A \in U$ existiert eine Matrix $\sqrt{A}$ mit $(\sqrt{A})^2 = A$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x, y) := (4x^2y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$. Liegt im Ursprung ein isoliertes Minimum vor?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Seien a, p, q, r positive, reelle Zahlen. Bestimmen Sie eine Zerlegung von a in drei Summanden $x, y, z > 0$, so dass der Ausdruck $x^p y^q z^r$ maximal ist. Bestimmen Sie dazu das lokale Extremum der Funktion $\ln(x^p y^q z^r)$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = a$ mit Hilfe des Lagrange-Multiplikators.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = (1 + z)e^{x-y}$. Für welche $\xi \in \mathbb{R}^3$ verschwindet die Richtungsableitung von f im Punkt $(0, 0, 0)$?

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grad* α ($\alpha > 0$), falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ gilt: $f(tx) = t^\alpha f(x)$.
Zeigen Sie, dass f genau dann homogen vom Grad α ist, wenn $\langle \text{grad} f(x), x \rangle = \alpha f(x)$ (für alle $x \in \mathbb{R}^n$).

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $n \geq 2$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Paare diametraler Punkte $x, -x$ gibt mit $f(x) = f(-x)$.
(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\varphi(x) := f(x) - f(-x)$ und wenden Sie den Zwischenwertsatz an.)

Am Donnerstag, dem 23.6. wird die Vorlesung wegen des Feiertags ausfallen.

Die Donnerstagsübungen für dieses Datum werden in eine Sammelübung auf Mittwoch, den 22.6. zusammengelegt. Diese wird von Pascal Schmidt im Hörsaal II der Informatik von 8.30-10 Uhr gehalten. Für diesen Termin entfällt die Anwesenheitspflicht.
Wir hoffen, dass es Ihnen möglich sein wird, diesen Ersatztermin wahrzunehmen oder sich zumindest Mitschriften der Übung zu besorgen.

Aufgrund des Feiertags ist die Abgabe dieses Übungsblatts **bereits am Mittwoch, dem 22.6., 17:00 Uhr**.