UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2011

Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 30.6.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (20 Punkte!). Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Für eine stetige Funktion $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ wird das *Wegintegral über F längs γ* definiert durch

$$\int_\gamma \langle F(x), dx\rangle := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Ist $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ stetig und ist $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$, dann gilt

$$\int_\gamma \langle F(x), dx\rangle = \int_{\gamma\circ\varphi} \langle F(x), dx\rangle.$$

Das Wegintegral ist also invariant unter Umparametrisierung.

(b) Seien $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ und $G : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\int_\gamma \langle (\alpha F + \beta G)(x), dx\rangle = \alpha \int_\gamma \langle F(x), dx\rangle + \beta \int_\gamma \langle G(x), dx\rangle$$

Das Wegintegral ist also $\mathbb{R}$-linear.

(c) Ist $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gilt die Abschätzung

$$\left| \int_\gamma \langle F(x), dx\rangle \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{x \in \gamma([a,b])} |F(x)|.$$

Hierbei bezeichnet $L(\gamma)$ wie gewohnt die Länge der Kurve γ.

(d) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $\gamma([a,b]) \subset U$ und ist $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_\gamma \langle \operatorname{grad} f(x), dx\rangle = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

bitte wenden

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Auf $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sei das Vektorfeld F gegeben durch:

$$F : U \to \mathbb{R}^3, \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0 \right)$$

(a) Zeigen Sie $\operatorname{rot} F(x) = 0$ für alle $x \in U$.

(b) Berechnen Sie für $r > 0$ das Wegintegral

$$\int_{\gamma_r} \langle F(x), dx \rangle,$$

wobei die stetige Kurve γ_r gegeben ist durch

$$\gamma_r : \ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ t \mapsto \big(r\cos(t), r\sin(t), 0 \big).$$

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 1 (d), dass F kein Gradientenfeld ist, d.h. es gibt **keine** stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $F = \operatorname{grad} f$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten folgende normierte Vektorräume:

$$\begin{aligned} f &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{C}, \exists N \in \mathbb{N} : a_n = 0 \text{ für } n \geq N\} \\ c_0 &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{C}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\} \end{aligned}$$

Hierbei sind f und c_0 versehen mit der Supremumsnorm $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

(a) Zeigen Sie, dass f ein nicht vollständiger Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass c_0 ein vollständiger Vektorraum ist.

(c) Zeigen Sie, dass $f \subset c_0$ dicht ist. (c_0 ist also die Vervollständigung von f.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^x t^n e^{-t} \mathrm{d}t$$

durch Differenzieren des parameterabhängigen Integrals

$$F(y) := \int_0^x e^{-ty} \mathrm{d}t$$