UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

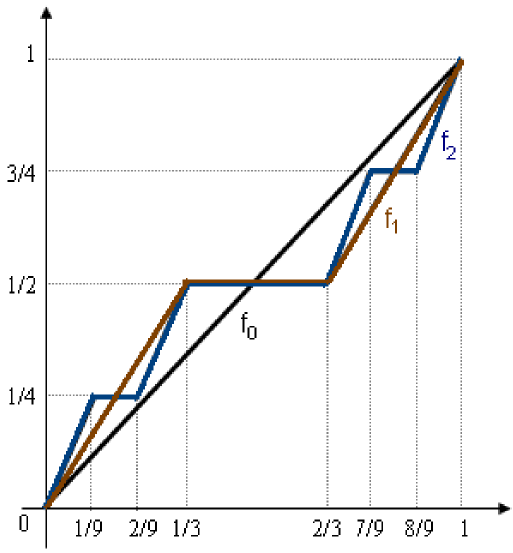
Blatt 11
Abgabe: Donnerstag, 7.7.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Cantormenge $C \subset [0,1]$ (siehe Blatt 5) eine Nullmenge ist. Die Cantormenge ist somit ein Beispiel einer überabzählbaren Nullmenge (vgl. Vorlesung, Beispiel 13.3.(3)).

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Die *Cantorfunktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist definiert als der punktweise Grenzwert der Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f_0(x) := x$$

$$f_{n+1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \text{falls } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Zeigen Sie: Die Cantorfunktion ist stetig, es gilt $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, f ist konstant auf jedem Teilintervall des Komplements der Cantormenge und f ist fast überall differenzierbar mit $f' = 0$ fast überall. (Für f' gilt also der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung *nicht*.) *(Grafik: wikimedia.org)*

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** (Vgl. Bemerkung 12.10.(4)) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter ($\mathbb{K}$-) Vektorraum, der also mit der Metrik $\rho(x, y) := \|x - y\|$ auch ein metrischer Raum ist. Sei $(Y, \tilde{\rho})$ seine Vervollständigung und sei $T : X \to Y$ die zugehörige isometrische Abbildung, so dass TX in Y dicht ist.
Zeigen Sie, dass $(Y, \|\cdot\|')$ dann auch ein normierter Vektorraum ist, wobei $\|x\|' := \tilde{\rho}(x, T(0))$. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Zeigen Sie, dass TX ein Vektorraum ist, wenn man $T(x) + T(y) := T(x + y)$ und $\lambda T(x) := T(\lambda x)$ definiert, für $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$. Setzen Sie diese Vektorraumstruktur auf Y sinnvoll fort (vergessen Sie nicht zu zeigen, dass das wohldefiniert ist!).

(b) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|'$ eine Norm auf TX definiert. Zeigen Sie dann, dass $\|\cdot\|'$ auch eine Norm auf Y definiert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Den *Limes superior* und den *Limes inferior* von Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, definiert man durch

$$\text{liminf } A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m, \qquad \text{limsup } A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m$$

Betrachten Sie $A_m := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \mid a_m = 0\} \subset c_0$, wobei c_0 so definiert ist, wie auf Blatt 10. Beschreiben Sie Limes superior und Limes inferior des Mengensystems $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Welche der folgenden Folgen ist in liminf A_n bzw. in limsup A_n?

$$a_n := \frac{1}{n}, \qquad b_n := (1 - (-1)^n)\frac{1}{n}, \qquad c_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & n < 100 \\ 0 & n \geq 100 \end{cases}$$

$$d_n := \text{Im } (i^n e^{-n}), \qquad e_n := \text{Re } (i^n e^{-n}), \qquad f_n := d_n - e_n$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Leiten Sie den Satz von Stone-Weierstraß für *komplexwertige* Funktionen aus jenem für reellwertige (siehe Vorlesung) her:
Sei K kompakt und sei $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm. Sei $A \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ eine Unteralgebra mit Eins (also $f, g \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in A$ und $fg \in A$, sowie $1 \in A$), die die Punkte trennt und die abgeschlossen ist unter komplexer Konjugation (also $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$). Dann ist A dicht in $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge. Zeigen Sie, dass U dann als abzählbare Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen geschrieben werden kann. (Dieser Schritt wird im Beweis von Satz 13.7 der Vorlesung benutzt.)