UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2011

Blatt 12
Abgabe: Donnerstag, 14.7.2011, 10:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die geraden Polynome, also die Polynome der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^{2k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

dicht in $\mathcal{C}[0,1]$ sind. Warum sind sie nicht dicht in $\mathcal{C}[-1,1]$?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Auf dem Raum $M_n(\mathbb{R})$ der reellwertigen $n \times n$-Matrizen sei ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle A, B \rangle := Tr(AB^t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

Hierbei bezeichnet $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die *Spur* der Matrix $A = (a_{ij})$. Mit A^t wird die *transponierte* Matrix $A^t = (a_{ji})$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wirklich ein Skalarprodukt definiert und finden Sie eine Orthonormalbasis diesbezüglich.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Die *Tschebyscheff-Polynome erster Art* sind gegeben durch $T_n(\cos\vartheta) = \cos(n\vartheta)$, also $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x, \ldots$ bzw. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, für $x \in [-1,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{T_0\} \cup \{\sqrt{2}T_n \mid n \geq 1\}$ ein Orthonormalsystem von $\mathcal{C}[-1,1]$ bzgl. des folgenden Skalarprodukts ist:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\{T_0\} \cup \{\sqrt{2}T_n \mid n \geq 1\}$ sogar eine Orthonormalbasis ist (für den Hilbertraum, der durch Vervollständigung von $\mathcal{C}[-1,1]$ bzgl. des oben definierten Skalarprodukts entsteht).

Am Montag, dem 18.7. wird es zur gewohnten Vorlesungszeit eine Fragestunde im AudiMO geben. Dort können Sie Fragen zur Klausur oder zur Vorlesung stellen; außerdem wird ein Infoblatt zur Klausur ausgegeben werden. Am 21.7. findet keine Veranstaltung statt.

Vergessen Sie nicht, sich im HISPOS für die Klausur anzumelden!