1. Eigenschaften von $C[0,1]$: sup-Norm und Vollständigkeit

$$C[0,1] := \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig} \}$$

Konvergenzarten für Funktionenfolgen

1.1. Def.:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$

(a) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, falls

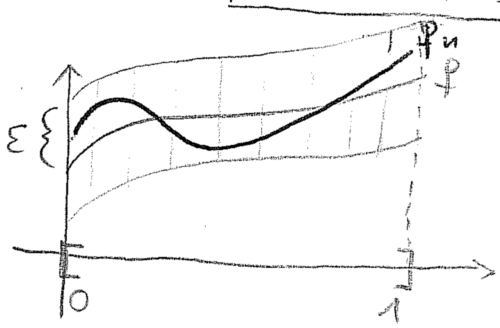
$$\boxed{\forall x \in [0,1]} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N :$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \boxed{\forall x \in [0,1]} :$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$



1.2. Def.:

Für $f \in C[0,1]$ definieren wir

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \left(= \sup \{ |f(x)| \mid x \in [0,1] \} \right)$$

und nennen $\|f\|_\infty$ die sup-Norm von f

Man beachte, dass nach Satz 10.5 aus der Analysis I gilt: $\|f\|_\infty < \infty$.

1.3. Satz

Für $f, f_n \in C[0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f $\iff$ $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ (für $n \longrightarrow \infty$)

Beweis:

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{= \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \; \forall x \in [0,1]$$

$\square$

Damit ist Def. 1.1 (b) konsistent mit Def. 17.1 (b) aus der Analysis I.
Dort (Satz 17.3) haben wir schon gesehen:

1.4 Satz

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $C[0,1]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist auch $f \in C[0,1]$.

Beachte: Dies gilt nicht, wenn wir nur die punktweise Konvergenz fordern.

1.5. Bemerkung / Erinnerung

$C[0,1]$ ist ein Vektorraum mit

- Addition: $C[0,1] \times C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$
  $(f,g) \longmapsto f+g$

  wobei $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

  (Nullvektor: $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$)

- Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$
  $(\lambda, f) \longmapsto \lambda \cdot f$

  wobei $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

1.6. Proposition:

$\|\cdot\|_\infty : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Norm, d.h.

(i) $\forall f \in C[0,1]: \quad \|f\|_\infty \geq 0$

(ii) $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \ \forall f \in C[0,1]: \quad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

(iv) $\forall f,g \in C[0,1]: \quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$
(Dreiecksungleichung)

Also: $C[0,1]$ ist ein normierter Vektorraum.

Beweis:

(i) Klar!

(ii) "$\Leftarrow$": Klar!

"$\Rightarrow$": Für alle $x_0 \in [0,1]$ gilt

$$0 \leq |f(x_0)| \leq \sup_{-} |f(x)| = \|f\|_\infty = 0.$$

Also $f(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in [0,1]$

Damit folgt: $f = 0$.

(iii) $$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \underbrace{|\lambda f(x)|}_{= |\lambda| \cdot |f(x)|}$$
$$= |\lambda| \cdot \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$
$$= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

(iv) $$\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \underbrace{|f(x) + g(x)|}_{\leq |f(x)| + |g(x)|}$$
$$\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$$
$$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\square$

Daher können wir "gleichmäßige Konvergenz" in $C[0,1]$ ähnlich zur Konvergenz in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ behandeln.

<u>1.7. Def.:</u>

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $C[0,1]$.

(i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>konvergiert</u> gegen $f \in C[0,1]$, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

(ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine <u>Cauchy-Folge</u>, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N.$$

1.8. Bemerkungen

Aus der Dreiecksungleichung folgt unmittelbar:

(i) Eine Folge in $C[0,1]$ kann höchstens einen Grenzwert haben.

(ii) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis:

(i) Angenommen: $f_n \longrightarrow f$
$f_n \longrightarrow g$

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$$\Rightarrow \|f-g\|_\infty = \|(f-f_n)+(f_n-g)\|_\infty$$
$$\leq \underbrace{\|f-f_n\|_\infty}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|f_n-g\|_\infty}_{<\varepsilon} \leq 2\varepsilon$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \|f-g\|_\infty = 0$$
$$\overset{1.6.(ii)}{\Rightarrow} f-g = 0 \Rightarrow f = g$$

(ii) Angenommen: $f_n \longrightarrow f$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N: \quad \|f-f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für alle $n, m \geq N$ gilt also:

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|(f_n-f)+(f-f_m)\|_\infty$$
$$\leq \underbrace{\|f_n-f\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|f-f_m\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\square$

Die Analogie zwischen
- $C[0,1]$ mit der sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$
- $\mathbb{R}$ mit dem euklidischen Betrag $|\cdot|$

reicht noch weiter:

1.9 Satz:

$C[0,1]$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $C[0,1]$ konvergiert gegen ein Element in $C[0,1]$.

Beweis:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C[0,1]$.

Also: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \underbrace{\|f_n - f_m\|_\infty}_{} < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N(\varepsilon)$

$$= \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Daher gilt für beliebiges $x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad \forall n,m \geq N(\varepsilon)$$

$\Rightarrow \ (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ist vollständig $\Rightarrow$ Der Grenzwert
(Korollar 12.12, Analysis I)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$$

existiert in $\mathbb{C}$

Damit haben wir eine Funktion
$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ (als punktweisen Limes der f_n)
definiert.

<u>Behauptung</u> $f_n \longrightarrow f$ (gleichmäßig)

Dies gilt, da

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{< \varepsilon/2 \quad \forall n,m \geq N(\frac{\varepsilon}{2}) =: N \quad \forall x \in [0,1]}$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall m \geq N \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad f_m \longrightarrow f \quad \text{(gleichmäßig)}$$

Nach Satz 1.4 gilt $f \in C[0,1]$

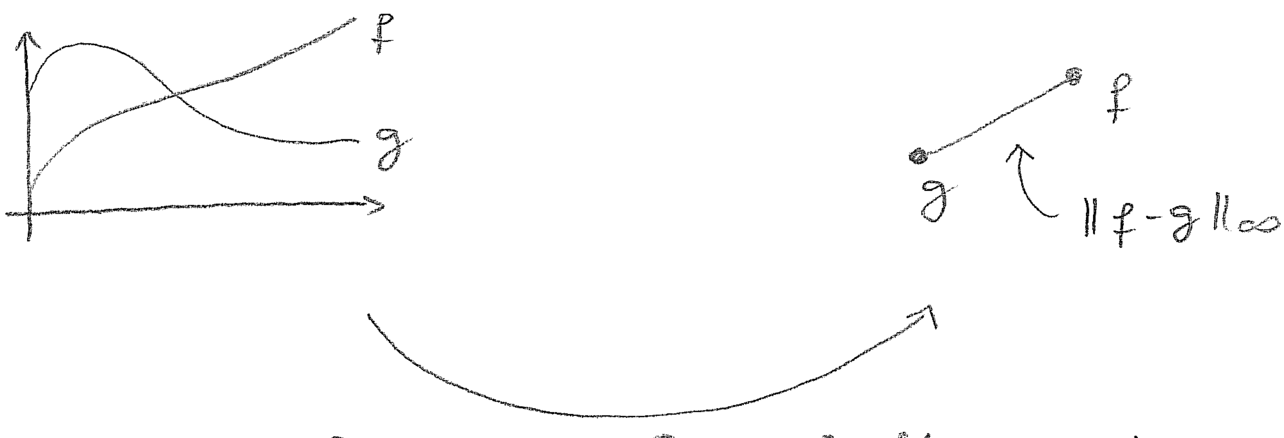
<u>Also:</u> $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $C[0,1]$ gegen f.

$\square$

<u>1.10. Bemerkung:</u>

Man mache sich die geänderte Betrachtungsweise bewusst:

komplizierte konkrete Objekte "Funktionen" $\xrightarrow[\text{ersetzt}]{\text{werden}}$ Punkte in einem abstrakten Raum "$C[0,1]$"



Die meisten Eigenschaften werden unterdrückt und nur die wesentlichen beibehalten!