10. Implizite Funktionen und Lagrangesche Multiplikatoren

10.1. Satz über implizite Fkten:

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ offen und $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$

Sei $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^q$ stetig diffbar mit

$$F(z_0) = F(x_0, y_0) = 0$$

und die Matrix $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{i,j=1}^{q}$

sei eine invertierbare $q \times q$ - Matrix.

Dann gibt es offene Kugeln $B(x_0, \delta)$ um x_0 und $B(y_0, \varepsilon)$ um y_0 (mit $\varepsilon, \delta > 0$) mit

$$B(x_0, \delta) \times B(y_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$$

und genau eine stetige Abbildung

$$g: B(x_0, \delta) \to B(y_0, \varepsilon)$$

so dass

$$F(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in B(x_0, \delta)$$

Für jedes $x \in B(x_0, \delta)$ ist $g(x) = y$ sogar die einzige Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$

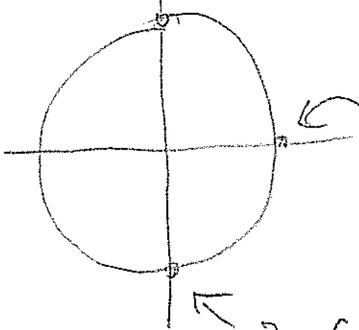
<u>10.2. Beispiel</u>: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ $\qquad p, q = 1$

$\Rightarrow F(x,y) = 0 \quad \hat{=}$ Einheitskreis

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \qquad 1 \times 1\text{-Matrix}$$

invertierbar gdw $y \neq 0$

$z = (0,1) \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $(-1,1)$



$z = (1,0) \rightsquigarrow$ keine eindeutige lokale Lösung

$z = (0,-1) \Rightarrow y = f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ auf $(-1,1)$

<u>Beweis</u>: Setze

$$f : U \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$
$$(x,y) \mapsto (x, F(x,y))$$

Dann

$$Df(x,y) = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cc} id_{p \times p} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \} p \\ \} q \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{p} & \underbrace{\qquad}_{q} \end{array} & \end{array}$$

also

$$Df \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} \text{ invertierbar}$$

Wende 9.2. auf f an (wobei $n = p+q$)

$\Rightarrow f^{-1}$ existiert in Umgebung von

$$f(z_0) = f(x_0, y_0) = (x_0, F(x_0, y_0)) = (x_0, 0)$$

Somit in dieser Umgebung

$$f^{-1}(x, 0) = (x, y)$$

Setze $g(x) := y$

Dann gilt

$$f(x, g(x)) = (x, 0)$$
$$\| \qquad\qquad \Rightarrow F(x, g(x)) = 0$$
$$(x, F(x, g(x)))$$

also ist g die gesuchte Fkt.

Eigenschaften von g folgen aus entsprechenden Eigenschaften von f aus Satz 9.2.

$\square$

10.3. Motivation: Wir wollen Fkt

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

maximieren, aber unter der Nebenbedingung

$$f(x) = 0$$

für eine andere Fkt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Beispiel: Maximiere Fläche

$h(x,y) = x \cdot y$

eines Rechtecks bei vorgegebenem Umfang

$2(x+y) = 1$, d.h. $f(x,y) = 2(x+y) - 1$

Idee: Führe Maximierung unter Nebenbedingungen auf entsprechendes Problem ohne Nebenbedingung zurück, durch Einführen zusätzlicher Variable λ, welche der Nebenbedingung entspricht

$$\rightarrow F(x,\lambda) := h(x) - \lambda f(x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} F(x,\lambda) = (\operatorname{grad} h(x) - \lambda \operatorname{grad} f(x), f(x))$$

also: $\operatorname{grad} F(x,\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (*) \\ \operatorname{grad} h(x) - \lambda \operatorname{grad} f(x) = 0 \end{cases}$$

Wegen $(*)$ sollte diese Lösung dann auch eine Lösung des ursprünglichen Problems sein.

10.4. Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$f : U \to \mathbb{R}$

stetig diffbare Fkt und

$M := \{ x \in U \mid f(x) = 0 \}$

Sei $a \in M$ ein Pkt mit $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$

Sei $h : U \to \mathbb{R}$ eine weitere stetig diffbare Fkt, die in a auf M ein lokales Maximum oder Minimum hat

(d.h. für $x \in M$, $d(x,a) < \varepsilon$ gilt $h(a) \geq h(x)$
oder $h(a) \leq h(x)$)

Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\operatorname{grad} h(a) = \lambda \cdot \operatorname{grad} f(a)$$

(λ heißt Lagrange-Multiplikator.)

Beweis: o.E. sei $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \neq 0$ $\qquad a = (a_1, .., a_n)$

$$\overset{10.1}{\Longrightarrow} \exists\, g : \underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\overset{\cap}{B((a_2,..,a_n),\delta)}} \to B(a_1, \varepsilon)$$

so dass wir M in der Nähe von a parametrisieren können durch

$$x = (g(x_2,..,x_n), x_2,.., x_n)$$

also: $f(g(x_2,..,x_n), x_2,..,x_n) = 0 \qquad (*)$

Betrachte dann

$$H(x_2,\dots,x_n) := h(g(x_2,\dots,x_n), x_2,\dots,x_n)$$

Diese hat in $(a_2,\dots,a_n) =: \tilde{a}$ ein Max bzw. Min,

d.h. es muss gelten

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\tilde{a}) = 0 \qquad i = 2,\dots,n$$

Nun gilt:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = -\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$\frac{\partial g}{\partial x_i}$ erhalten wir aus (*)

$$0 = \frac{\partial f \circ g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}(\tilde{a}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_1}(a) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^{-1}}_{\text{setze } =: \lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \qquad \forall i = 2,\dots,n$$

beachte: Gleichung gilt trivialerweise auch für $i = 1$

10.5. Beispiel: $h(x,y) = x \cdot y$

$$f(x,y) = 2(x+y) - 1$$

$$\Rightarrow \quad \partial h = (y, x)$$

$$\partial f = (2, 2)$$

$$\Rightarrow \quad (y, x) = \lambda \cdot (2, 2)$$

d.h. $x = 2\lambda = y$

$$0 = f(x,y) = 2(4\lambda) - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow \quad x = y = \frac{1}{4}$ ist Kandidat für Maximum

Beachte: $\quad h(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$

$M = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 2(x+y) = 1\}$

ist kompakt,

$h : M \to \mathbb{R}$ stetig

also gibt es ein Maximum von h auf M.

Am Rand von M ($x = 0$ oder $y = 0$) wird dies nicht angenommen (dort $h = 0$), also muss der Pkt $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ das Maximum liefern.