11. Differentiation von parameterabhängigen Integralen

11.1. Satz: Seien $I = [a,b]$ und $J = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$.
Sei weiter f stetige Fkt auf $I \times J$ und φ eine Regelfkt auf I. Wir setzen

$$F(t) := \int_a^b f(x,t)\, \varphi(x)\, dx \qquad (t \in J)$$

Dann gilt:

a) F ist stetig

b) Falls f stetig partiell nach t diffbar, so ist F diffbar und es gilt:

$$\frac{dF}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, \varphi(x)\, dx$$

Beweis: a) beachte:

- $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, $f: I \times J \to \mathbb{R}$ stetig

$\overset{4.9.}{\Longrightarrow}$ f glm stetig, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0:$

$\|(x,t) - (y,s)\| < \delta \Rightarrow |f(x,t) - f(y,s)| <$

also insbesondere (für $x = y$):

$|t - s| < \delta \;\; \Rightarrow |f(x,t) - f(x,s)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

- φ Regelfkt

$$\overset{16.11(5)}{\underset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow}} \quad \|\varphi\| := \{ |\varphi(x)| \mid x \in I \} < \infty$$

Also gilt für $|t-s| < \delta$:

$$|F(t) - F(s)| = \left| \int_a^b f(x,t)\,\varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x,s)\,\varphi(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f(x,t) - f(x,s)|}_{< \varepsilon \ \forall x} \cdot \underbrace{|\varphi(x)|}_{\leq \|\varphi\|}\,dx$$

$$\leq (b-a) \cdot \|\varphi\| \cdot \varepsilon$$

$\Rightarrow F$ stetig

b) beachte: $\frac{\partial f}{\partial t}$ ist stetig, also auch glm. stetig auf kompakter Menge $I \times J$

Sei nun $t \in J$ und (h_n) Folge in $\mathbb{R}$ mit $h_n \neq 0 \ \forall n$ und $h_n \to 0$

Betrachte Differenzenquotient

$$\frac{f(x,t+h_n) - f(x,t)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \Theta_n h_n) \quad \text{mit } 0 \leq \Theta_n \leq 1)$$

nach Mittelwertsatz

Da $\frac{\partial f}{\partial t}$ glm stetig, konvergiert

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \Theta_n h_n) \to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \quad \text{für } h_n \to 0$$

glm in $x \in I$.

also:

$$\frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \int_a^b \underbrace{\underbrace{\frac{f(x,t+h_n) - f(x,t)}{h_n}}_{\to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \text{ glm in } x} \varphi(x)}_{\to \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \cdot \varphi(x) \text{ glm in } x} dx$$

$$\Rightarrow \lim_{h_n \to 0} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \cdot \varphi(x)\, dx$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

11.2. Beispiel: $\int_0^a x^2 \cos x \, dx = ?$

Statt mit partieller Integration kann man dies auch wie folgt berechnen:

$$F(t) := \int_0^a \cos xt \, dx$$

$$\Rightarrow F'(t) = \int_0^a \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \cos xt}_{-x \cdot \sin xt} \, dx$$

$$\Rightarrow F''(t) = -\int_0^a x \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \sin xt}_{x \cos xt} \, dx$$

$$= -\int_0^a x^2 \cos xt \, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^a x^2 \cos x \, dx = -F''(1)$$

Andererseits:

$$F(t) = \int_0^a \cos xt \, dx = \left[\frac{\sin xt}{t} \right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= \frac{\sin at}{t}$$

$$\Rightarrow F''(t) = \frac{2 \sin at}{t^3} - \frac{2a \cos at}{t^2} - \frac{a^2 \sin at}{t}$$

$$\Rightarrow -F''(1) = (a^2 - 2) \sin a + 2a \cos a$$

11.3 Motivation: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und

$v: U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbare Fkt ("Vektorfeld")

Frage: Wann ist v Gradient einer skalaren Fkt $f: U \to \mathbb{R}$

(z.B. in Elektrostatik: $f \mathrel{\hat{=}}$ Potential,
$v \mathrel{\hat{=}}$ elektrisches Feld)

Falls $v = \operatorname{grad} f$, d.h.

$$v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

dann gilt notwendigerweise:

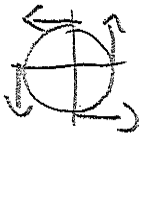
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

(da wir $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ als stetig voraussetzen, somit f zweimal stetig diffbar, d.h. partielle Ableitungen vertauschen)

Ist dies auch hinreichend?

Im allgemeinen nicht: z. B. (in $\mathbb{R}^2$)

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$



$$v = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

erfüllt $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$ (nachrechnen!), kann aber nicht als $\operatorname{grad} f$ geschrieben

Problem: U hat ein Loch (d.h. ist nicht "einfach zusammenhängend")

Falls U keine Löcher hat, so ist notwendige Bedingung auch hinreichend

<u>11.4. Satz:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offene Kugel und $v: U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbare Fkt

Dann sind äquivalent:

i) $\exists$ stetig diffbare Fkt $f: U \to \mathbb{R}$ mit

$$v(x) = \operatorname{grad} f(x)$$

ii) $\operatorname{rot} v(x) = 0 \quad \forall x \in U$,

wobei

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

"Rotation"

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$" siehe 11.3.

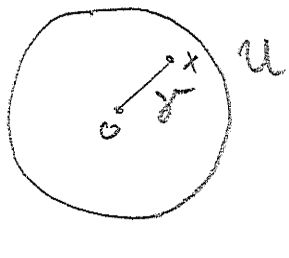
"$\Leftarrow$" Sei $\operatorname{rot} v(x) = 0$, d.h. $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j$

o.E: $U = B(0,r)$

Setze

$$f(x) := \sum_{i=1}^{3} \left(\int_0^1 v_i(tx)\, dt \right) x_i$$

$$\text{"} = \left\langle \int_\gamma v(y), dy \right\rangle \text{"}$$



Beh: $\operatorname{grad} f = v$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{3} \int_0^1 \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(tx)}_{\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(tx)} \cdot t \, dt \cdot x_i$$

$$+ \int_0^1 v_j(tx) \, dt$$

$$\frac{d}{dt}\left(t\, v_j(tx)\right) = v_j(tx) + \sum_{i=1}^{3} t \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} = t\, v_j(tx)\Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$= v_j(x) - 0$$

$$= v_j(x)$$

$\Rightarrow$ grad $f = v$ $\square$