12. Vervollständigung von metrischen Räumen und abstrakte Integration

12.1. Motivation:

Um Analysis zu betreiben bevorzugen wir vollständige Räume. Aber oft sind unsere Räume unvollständig, und wir wollen sie vergrößern, um sie vollständig zu machen.

z.B.: Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$.

Frage: Ist dies immer möglich?

beachte: Ist $(X, \mathcal{S})$ metrischer Raum und X Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes Y, dann können wir den Abschluß $\bar{X}$ nehmen, um X zu vervollständigen.

→ Frage: Können wir einen metrischen Raum immer in einen vollständigen metrischen Raum einbetten?

Antwort: Ja!

und wir können Y immer als

$$Y = C_b(X)$$

wählen!

<u>12.2. Def:</u> Sei (X, ϱ) ein metrischer Raum. Wir setzen

$$C_b(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt} \}$$

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)| \quad \text{für } f \in C_b(X)$$

<u>12.3. Satz:</u> Für einen metrischen Raum X (nicht notwendigerweise vollständig) ist $(C_b(X), \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Vektorraum.

<u>Beweis:</u> genauso wie für $C[0,1]$; vgl. insbesondere 1.9

beachte: die Vollständigkeit der Fktn

$f : X \to \mathbb{R}$

wird auf die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zurückgeführt $\square$

<u>12.4. Def.:</u> Sei (X, ρ) ein metrischer Raum.

Eine <u>Vervollständigung</u> von (X, ρ) ist ein vollständiger metrischer Raum $(Y, \tilde{\rho})$ und eine Abbildung

$T: X \to Y$, so dass

$$\tilde{\rho}(Tx_1, Tx_2) = \rho(x_1, x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in X$$

(d.h. T ist "isometrisch")

und so dass TX dicht ist in Y.

<u>12.5. Bemerkungen:</u> 1) Eine isometrische Abbildung ist automatisch injektiv (d.h. eine Einbettung), da

$$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow \tilde{\rho}(Tx_1, Tx_2) = 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$
$$\rho(x_1, x_2)$$

und $\rho(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

2) Ist (Y', ρ') eine andere Vervollständigung von (X, ρ), so gibt es eine isometrische Bijektion $Y \to Y'$, d.h. Vervollständigungen sind isometrisch isomorph und wir sprechen normalerweise von <u>der</u> Vervollständigung.

3) ⊛

(*) 12.5.3) In der Vervollständigung $T: X \to Y$ (12-3)

identifizieren wir üblicherweise $TX \subset Y$ mit

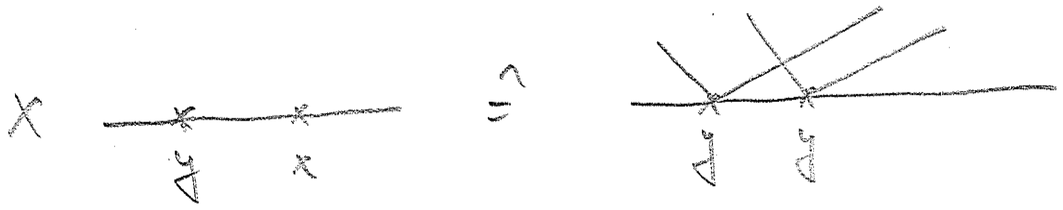
X. Unter dieser Identifizierung ist dann

jedes $y \in Y$ Grenzwert einer Cauchyfolge aus X.

12.6. Satz: Jeder metrische Raum hat eine Vervollständigung.

Beweis: Sei (X, ρ) metrischer Raum.

Idee: Bette X in $C_b(X)$ ein



$$x \mathrel{\hat{=}} f_x \quad \text{wobei} \quad f_x(t) = \rho(x,t)$$

funktioniert, falls ρ beschränkt ist (z.B. für X kompakt), aber im Allgemeinen kann f_x unbeschränkt sein

daher Modifikation zu

$$f_x(t) := \rho(x,t) - \rho(x_0,t)$$

für ein fest gewähltes $x_0 \in X$

z.z.: i) f_x stetig
ii) f_x beschränkt $\Big\}$ d.h. $f_x \in C_b(X)$

iii) $x \mapsto f_x$ isometrisch, d.h.

$$\|f_x - f_y\| = \rho(x,y)$$

i) Betrachte $t_1, t_2 \in X$ mit $\rho(t_1,t_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ 12-

$$\Rightarrow |f_x(t_1) - f_x(t_2)| =$$

$$= |\rho(x,t_1) - \rho(x_0,t_1) - \rho(x,t_2) - \rho(x_0,t_2)|$$

$$\leq \underbrace{|\rho(x,t_1) - \rho(x,t_2)|}_{\leq \rho(t_1,t_2) < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\rho(x_0,t_1) - \rho(x_0,t_2)|}_{\leq \rho(t_1,t_2) < \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \varepsilon$$

$\Rightarrow f_x$ stetig

ii) $$|f_x(t)| = |\rho(x,t) - \rho(x_0,t)|$$

$$\leq \rho(x,x_0) \qquad \forall t \in X$$

$$\Rightarrow \|f_x\| \leq \rho(x,x_0) < \infty$$

also: $f_x \in C_b(X) \qquad \forall x \in X$

iii) Sei $x_1, x_2 \in X$, $t \in X$

$$|f_{x_1}(t) - f_{x_2}(t)| = |\rho(x_1,t) - \rho(x_2,t)|$$

$$\leq \rho(x_1,x_2) \qquad \forall t \in X$$

$$\Rightarrow \|f_{x_1} - f_{x_2}\| \leq \rho(x_1,x_2)$$

Setze $t = x_2$:

$$f_{x_1}(x_2) - f_{x_2}(x_2) = \rho(x_1, x_2) - \underbrace{\rho(x_2, x_2)}_{=0}$$

$$= \rho(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow \|f_{x_1} - f_{x_2}\| = \rho(x_1, x_2)$$

d.h. $T: x \mapsto f_x$ ist isometrisch
$X \to C_b(X)$

also $TX = \{f_x \mid x \in X\} \subset C_b(X)$

Dann ist $Y := \overline{TX}$ Vervollständigung von X. □

12.7. Bem: 1) Beachte: Satz liefert keine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$, da wir $\mathbb{R}$ schon brauchen, um $C_b(\mathbb{Q})$ zu bilden. $\mathbb{R}$ muß direkt aus $\mathbb{Q}$ konstruiert werden (z.B. durch Dedekind-Schnitte)
2) (*)

12.8. Motivation: Auf $C[0,1]$ haben wir verschiedene Normen, nämlich

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty)$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{0 \le t \le 1} |f(t)| \qquad p = \infty$$

(insbesondere, $p=2$ kommt von einem Skalarprodukt)

aber: nur für $\|\cdot\|_\infty$ ist $C[0,1]$ vollständig; ansonsten ist die Norm interessant, aber der Raum unangemessen

$\to$ verbessern dies durch Vervollständigung

<u>12.9. Def.</u>: Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p[0,1]$ die Vervollständigung von $C[0,1]$ bzgl. der L^p-Norm $\|\cdot\|_p$.

<u>12.10. Bemerkungen</u>: 1) Im Augenblick sind Elemente von $L^p[0,1]$ einfach abstrakte Objekte (oder Elemente in $C_b(C[0,1])$), aber keine Funktionen auf $[0,1]$. Im nächsten Kapitel werden wir diese Frage untersuchen.

2) Jetzt wollen wir untersuchen, ob wir die Integration von stetigen Fkten (d.h. das Riemann Integral aus Analysis I) auf $L^1[0,1]$ ausdehnen können.

3) Beachte auch: da $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ für $1 \leq p \leq q \leq \infty$, ist $L^1[0,1]$ der "größte" der L^p-Räume.

4) Es ist recht einfach zu sehen, dass Vervollständigung eines normierten Vektorraumes wieder ein normierter Vektorraum ist. Somit ist $L^p[0,1]$ ein vollständiger normierter Vektorraum.

<u>12.11. Satz:</u> Das Riemann-Integral hat eine eindeutige stetige Fortsetzung von $C[0,1]$ nach $L^1[0,1]$. Wir bezeichnen es mit $\int f$. Es gilt:

(1) $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$

$\forall f, g \in L^1[0,1]$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $|\int f| \leq \int |f| = \|f\|_1 \quad \forall f \in L^1$

(3) Falls $f \geq 0$, dann ist $\int f \geq 0$.

[Hierbei bedeutet $f \geq 0$:

$\exists f_n \in C[0,1], f_n \geq 0, f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$]

<u>Beweis:</u> Jedes $f \in L^1$ ist Grenzwert $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ wobei $f_n \in C[0,1] \quad \forall n$

Es gilt

$$\left| \int_0^1 f_n(t)\,dt - \int_0^1 f_m(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt$$

$$= \|f_n - f_m\|_1$$

Da $(f_n)_n$ in L^1 konvergiert

$\Rightarrow$ $(f_n)_n$ Cauchy-Folge in L^1

$\Rightarrow$ $\left(\int_0^1 f_n(t)\,dt \right)_n$ ist CF in $\mathbb{R}$

und konvergiert somit (da $\mathbb{R}$ vollständig)

Wir können also definieren:

$$\int f := \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

Dies ist einzig mögliche stetige Fortsetzung von Integral.

aber potentielles Problem: Nicht-Eindeutigkeit von $(f_n)_n$

Somit müssen wir zeigen: für $f_n, g_n \in C([0,1])$ mit

$$\begin{matrix} f_n \searrow \\ g_n \nearrow \end{matrix} f \overset{?}{\Longrightarrow} \lim \int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim \int_0^1 g_n(t)\,dt$$

dies ist aber klar, da:

$$f_n - g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0$$

$$\Rightarrow \left| \int (f_n(t) - g_n(t))\, dt \right|$$

$$\leq \int |f_n(t) - g_n(t)|\, dt$$

$$= \|f_n - g_n\|_1 \longrightarrow 0$$

d.h.

$$\int f_n(t)\, dt - \int g_n(t)\, dt \to 0$$

also (da beide Integrale konvergieren)

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int g_n(t)\, dt$$

zeige nun (2): nach Ana I gilt $\forall f \in C[0,1]$

$$\left| \int f_n(t)\, dt \right| \leq \|f_n\|_1$$

$$\Big\downarrow f_n \to f$$

$$\left| \int f \right| \leq \|f\|_1 \qquad \Rightarrow (2)$$

(1) und (3) folgen analog

bleibt z.z.: $L^1 \to \mathbb{R}$ ist stetig

$$f \mapsto \int f$$

dafür reicht es z.z.:

$$\left.\begin{array}{l} f_n \in L^1 \\ f_n \to 0 \end{array}\right\} \overset{!}{\Rightarrow} \int f_n \to 0$$

dies folgt aus (2) $\square$

<u>12.12. Bemerkungen</u>: 1) Die Fortsetzung des Riemann Integrals, die durch eine solche abstrakte Fortsetzung definiert ist, heißt <u>Daniell - Integral</u>. Dies gibt das gleiche wie das <u>Lebesgue - Integral</u>, welches konkreter mit Hilfe der Maßtheorie definiert wird (in Ana III)

2) Warum ist eine solche Fortsetzung viel besser als das Riemann Integral?

→ (1) L^1 ist vollständig

(2) viel bessere Grenzwertsätze in diesem Rahmen.

<u>12.13. Satz von der monotonen Konvergenz</u>: Betrachte $f_n \in L^1[0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_{n+1} \geq f_n$ $\forall n$, so dass $\sup\limits_{n \geq 1} \int f_n < \infty$. Dann konvergiert (f_n) bzgl. $\|\cdot\|_1$ gegen ein $f \in L^1[0,1]$ und es gilt:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

<u>Beweis:</u> Gemäß 12.11 (2) ist

$(\int f_n)_n$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$.

Nach Voraussetzung nach oben beschränkt

$\Rightarrow L := \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n \in \mathbb{R}$ existiert

Beh.: (f_n) ist Cauchyfolge in L^1

Betrachte $\varepsilon > 0$.

Dann $\exists N \ \forall n \geq N$:

$$L - \varepsilon < \int f_N \underset{12.11\,(3)}{\leq} \int f_n \leq L$$

also gilt für $N \leq m \leq n$:

$$\| f_n - f_m \| = \int | f_n - f_m |$$

$$= \int f_n - f_m$$

$$= \int f_n - \int f_m$$

$$< \varepsilon$$

$\Rightarrow (f_n)$ Cauchyfolge in L^1

L^1 vollständig $\Rightarrow f := \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ existiert in L^1

Da $f \mapsto \int f$ vollständig, gilt:

$\int f = \lim \int f_n$ $\square$