13. Nullmengen und Interpretation der L^p-Räume als Funktionenräume

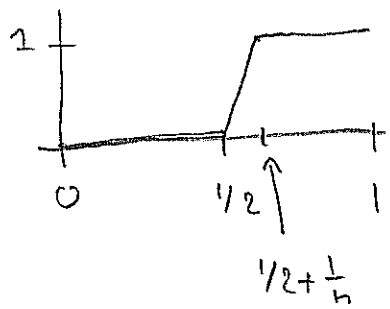
13.1. Motivation:

gemäß Definition ist

$L^p[0,1]$ = abstrakte Raum von "Grenzwerten" von Cauchyfolgen in $C[0,1]$ bzgl. $\|\cdot\|_p$

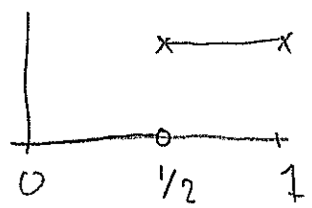
Solche Grenzwerte sollten aber wirklichen Funktionen auf $[0,1]$ entsprechen!

z. B.

$f_n =$ 

$\Rightarrow (f_n)_n$ ist Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_p$

In dem Fall ist klar, was der Grenzwert von $(f_n)_n$ in L^p sein sollte, nämlich der punktweise Grenzwert

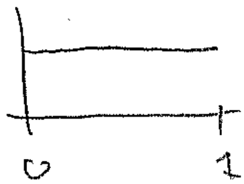
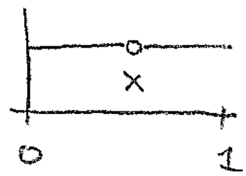
$f =$ 

Wir vermuten: Ist (f_n) eine Cauchyfolge in $C[0,1]$ bzgl. $\|\cdot\|_p$, dann konvergiert f_n punktweise gegen eine Fkt f, welche wir dann mit dem abstrakten Grenzwert von $(f_n)_n$ in L^p identifizieren können.

Dies ist im Prinzip korrekt, <u>aber</u> wir müssen "kleine" Ausnahmemengen zulassen, wo keine pktweise Konvergenz vorliegt.

verwandtes Problem: $\|\cdot\|_p$ kann nicht zwischen Fkten unterscheiden, welche sich nur auf "kleinen" Mengen unterscheiden

z.B.

$f =$  $g =$ 

$\Rightarrow \|f-g\|_p = 0$

d.h. f und g müssen in L^p identifiziert werden!

<u>13.2. Def</u>: Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist eine <u>Nullmenge</u>, falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ abzählbare Familie von Intervallen $\{U_n = (c_n, d_n)\}_{n \geq 1}$ so dass $A \subset \bigcup_{n\geq 1} U_n$ und $\sum_{n \geq 1} (d_n - c_n) < \varepsilon$

Bezeichnung: $|U_n| = d_n - c_n$

für $U_n = (c_n, d_n)$

<u>13.3. Beispiele:</u> 1) $A = \{x\} \subset \mathbb{R}$ ist Nullmenge,

da $\{x\} \subset \underbrace{\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{|\cdot| = \varepsilon} \quad \forall\, \varepsilon > 0$

2) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, aber trotzdem ist $\mathbb{Q}$ eine Nullmenge:

$\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ($\mathbb{Q}$ abzählbar!)

Betrachte $\varepsilon > 0$

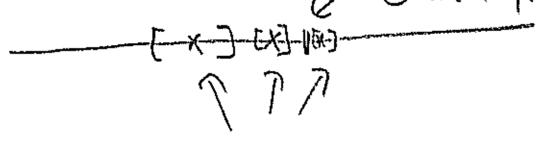
Setze $U_n := \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \subset \bigcup_{n \geq 1} U_n$

und $\sum_{n \geq 1} |U_n| = \sum_{n \geq 1} \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} = \varepsilon$

[beachte: die U_n überdecken zwar ganz $\mathbb{Q}$, aber nur einen kleinen Teil von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

typische Situation:



$\exists\, x_n \in \mathbb{Q}$ beliebig nahe zu x, aber die zugehörigen $U_n \ni x_n$ werden immer kleiner,]

[illegible]

3) Es gibt überabzählbare Nullmengen; z.B. die Cantormenge

4) Intervalle $[a,b]$ (mit $a < b$) sind keine Nullmengen (sondern haben Maß $b-a$):

Sei $[a,b] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{offen}}}{U_n}$

$[a,b]$ kompakt $\Rightarrow \exists$ endliche Teilüberdeckung $U_{n(1)}, \ldots, U_{n(k)}$ von $[a,b]$

aber dann muß gelten:

$$\sum_{n \geq 1} |U_n| \geq \sum_{N=1}^{k} |U_{n(N)}| \geq b-a$$

<u>13.4. Satz:</u> 1) Sei $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Ist B eine Nullmenge, dann ist auch A eine Nullmenge.

2) Sind A_n $(n \in \mathbb{N})$ Nullmengen, dann ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge

3) Jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge.

<u>Beweis:</u> 1) klar

2) ähnlich wie in 13.3 (2)

Seien $\{U_n^{(m)}\}_{n\geq 1}$ offene Intervalle mit

$$A_m \subset \bigcup_n U_n^{(m)} \quad \text{und} \quad \sum_n |U_n^{(m)}| < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

$\Rightarrow$ $\{U_n^{(m)}\}_{m,n\geq 1}$ abzählbare Überdeckung von $\bigcup_m A_m$ und

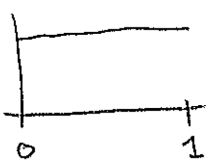
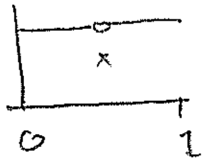
$$\sum_{n,m} |U_n^{(m)}| < \sum_m \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon$$

3) folgt aus (2) und der Tatsache, dass $\{x\}$ Nullmenge ist $\square$

13. 5. Def.: Eine Eigenschaft gilt <u>fast überall</u> (f.ü.), falls die Menge der Punkte, wo sie nicht gilt, eine Nullmenge ist.

13. 6. Beispiele: 1) $f = g$ f.ü. bedeutet $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ ist Nullmenge

also z. B.


$=$

f.ü.

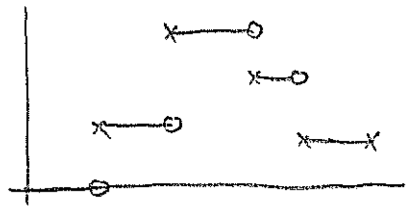
aber auch

$\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} = 0$ f.ü. wobei $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

2) f ist f.ü. stetig

$\Longleftrightarrow$ {Unstetigkeitspkte von f} ist Nullmenge

z.B.



ist f f.ü. stetig

(beachte: dies ist nicht das gleiche wie:

$\exists\, g$ stetig : $f = g$ f.ü.)

13.7. Satz: Sei $f \in L^p[0,1]$. Wir können dann eine Folge $(f_n)_n$ in $C[0,1]$ wählen, die gegen f in $\|\cdot\|_p$-Norm konvergiert, so dass $(f_n(x))_n$ fast überall gegen eine Fkt $f(x)$ konvergiert. Falls $(g_n)_n$ eine andere Folge aus $C[0,1]$ ist die in L^p gegen f und punktweise fast überall gegen eine Funktion $g(x)$ konvergiert, so gilt $g(x) = f(x)$ f.ü.

Beweis: Wir wählen eine Folge $(f_n)_n$ in $C[0,1]$ so dass

$$\|f - f_n\|_p < 4^{-n} \qquad \forall\, n \geq 1$$

Wir setzen

$$U_n := \{ x \in [0,1] \mid |f_n(x) - f_{n+1}(x)| > 2^{-n} \}$$

und

$$E := \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} U_n$$

beachte: $x \in E$ bedeutet: $\exists$ unendlich viele n (welche hängt von x ab) s.d.

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| > 2^{-n}$$

und

$x \notin E \iff \exists N = N(x)$ so dass

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq 2^{-n} \quad \forall n \geq N \qquad (*)$$

Betrachte nun $x \notin E$ und sei N gemäß $(*)$

Dann gilt für $N \leq n \leq m$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_k(x) - f_{k+1}(x)|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k}$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\Rightarrow (f_n(x))_n$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und konvergiert somit; bezeichne Grenzwert mit $f(x)$

Somit gilt also:

$\forall x \notin E$: $f_n(x)$ konvergiert gegen $f(x)$

Beh.: E ist Nullmenge

Beweis: $E \subset \bigcup_{n \geq k} \mathcal{U}_n \qquad \forall k$

Idee: $\mathcal{U}_n$ kann nicht groß sein, da

$$\mathcal{U}_n = \{ x \mid |f_n(x) - f_{n+1}(x)| > 2^{-n} \},$$

aber andererseits

$$\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq \underbrace{\|f_n - f\|_p}_{< 4^{-n}} + \underbrace{\|f - f_{n+1}\|_p}_{< 4^{-(n+1)} \leq 4^{-n}}$$

$$\leq 2 \cdot 4^{-n}$$

genauer: $\mathcal{U}_n$ ist offen (als Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Fkt $|f_n - f_{n+1}|$)

$\overset{\text{Übungsaufgabe}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{U}_n$ ist abzählbare Vereinigung von disjunkten offenen Intervallen

also: $\mathcal{U}_n = \bigcup_{i \geq 1} (c_i, d_i) \qquad \subset [0,1]$

dann gilt:

$$\|f_n - f_{n+1}\|_p^p = \int_0^1 |f_n(x) - f_{n+1}(x)|^p \, dx$$

$$\geq \sum_{i \geq 1} \int_{c_i}^{d_i} \underbrace{|f_n(x) - f_{n+1}(x)|^p}_{\geq 2^{-np} \text{ auf } U_n} \, dx$$

beachte: (c_i, d_i) sind disjunkt

$$\geq 2^{-np} \cdot \sum_{i \geq 1} (d_i - c_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \geq 1} (d_i - c_i) \leq 2^{np} \underbrace{\|f_n - f_{n+1}\|_p^p}_{\leq 2^p \cdot 4^{-np}}$$

$$\leq 2^{(1-n)p}$$

$\Rightarrow E \subset \bigcup_{n \geq k} U_n$ kann überdeckt werden

mit offenen Intervallen mit einer Gesamtlänge

$$\sum_{n \geq k} |U_n| \leq \sum_{n \geq k} 2^{(1-n)p} = 2^{-kp} \cdot 2^p \cdot \frac{1}{1 - 2^{-p}} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$\Rightarrow E$ ist Nullmenge %

Somit haben wir gezeigt:

$f_n(x)$ konvergiert gegen ein $f(x)$ f.ü.

(nämlich für alle $x \notin E$)

Sei nun $(g_n)_n$ eine andere Folge in $C[0,1]$, die gegen f in L^p und punktweise f.ü. gegen eine Flt $g(x)$ konvergiert

Betrachte eine Teilfolge $(g_{n(k)})_k$ so dass

$$\| g_{n(k)} - f \|_p < 4^{-k} \quad \forall k$$

und setze

$$V_k := \{ x \in [0,1] \mid | g_{n(k)}(x) - f_k(x) | > 2^{-k} \}$$

V_k ist offen, da $g_{n(k)} - f_k$ stetig

aber:

$$\| g_{n(k)} - f_k \|_p \leq \underbrace{\| g_{n(k)} - f \|_p}_{\leq 4^{-k}} + \underbrace{\| f - f_k \|_p}_{\leq 4^{-k}}$$

$$\leq 2 \cdot 4^{-k}$$

$\underset{\text{vorher}}{\overset{\text{wie}}{\Longrightarrow}}$ $F := \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} V_k$ ist Nullmenge

Betrachte $x \notin F$, d.h. $\exists N = N(x)$:

$$| g_{n(k)}(x) - f_k(x) | \leq 2^{-k} \quad \forall k \geq N \quad (**)$$

Ist außerdem $x \notin E$, dann gilt:

$$f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$$

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} g_{n(k)}(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$$

also gilt für $x \notin \underbrace{F \cup E}_{\text{Nullmenge}}$: $g_{n(k)}(x) \longrightarrow f(x)$

$\Longrightarrow g(x) = f(x)$ f.ü. $\square$

<u>13.8. Bemerkungen</u>: 1) Der Satz sagt uns:

Ein Element $f \in L^p[0,1]$ kann mit einer Fkt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ identifiziert werden; aber: wir müssen zwei Fkten, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, identifizieren

streng genommen: Elemente in L^p sind Äquivalenzklassen von Fkten die f.ü. übereinstimmen

2) Beachte auch: Unsere Def. eines Integrals (gemäß Daniell) für $f \in L^p$ ist immer noch durch Approximation von $f \in L^p$ durch $f_n \in C[0,1]$ und Festsetzung

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx$$

Maßtheorie wird (in Ana III) eine andere Methode (gemäß Lebesgue) liefern, um $\int f$ direkt durch die Werte der Fkt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zu berechnen

(und dann macht es auch Sinn zu schreiben

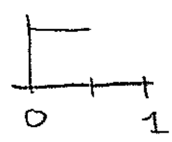
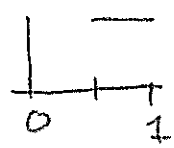
$$\int f = \int f(x)\,dx \qquad)$$

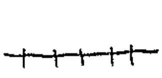
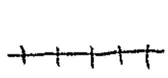
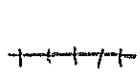
3) Beachte, dass wir in 13.7. Folgendes gezeigt haben (für $f_n \in C[0,1]$, $f \in L^p$)

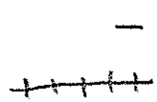
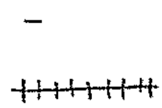
$f_n \to f$ in L^p $\Rightarrow$ $\exists$ Teilfolge $(f_{n(k)})_k$ die pktweise f.ü. gegen f konvergiert

Dies ist im allgemeinen falsch, wenn man nicht zu einer Teilfolge übergeht!

Bsp:

$f_1 =$  $\qquad f_2 =$ 

$f_3 =$  $\qquad f_4 =$  $\qquad f_5 =$ 

$f_6 =$  $\qquad f_7 =$  $\qquad$ etc.

$\Rightarrow f_n \to 0$ in L^p

aber: $(f_n(x))_n$ konvergiert für kein $x \in [0,1]$

([illegible])