14. Der Satz von Stone-Weierstraß

14.1. Motivation: Klassisches Resultat von Weierstraß (1895) sagt, dass Polynome dicht sind in $C[0,1]$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Es gibt viele Beweise davon, welche konkrete Eigenschaften von Polynomen benutzen; aber 1948 bemerkte Stone, dass nur ganz wenige wesentlich sind und erhielt so eine weitreichende Verallgemeinerung des Satzes von Weierstraß

14.2. Def: Sei K ein kompakter metrischer (oder topologischer) Raum. Wir betrachten den Banachraum

$$C(K) := \{ f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \},$$

versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup_{t \in K} |f(t)|$$

(vgl. 12.3 und beachte, dass stetige Fkten auf kompakten Mengen automatisch beschränkt sind)

1) $A \subset C(K)$ ist eine Unteralgebra mit Eins, falls $1 \in A$ (d.h. A enthält die konstante Fkt 1) und

$$\left.\begin{matrix} f, g \in A \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha f + \beta g \in A \\ f \cdot g \in A \end{matrix}$$

2) $A \subset C(K)$ <u>trennt die Pkte von K</u>, falls

$$\forall\, s,t \in K \text{ mit } s \neq t \quad \exists f \in A : f(s) \neq f(t)$$

<u>14.3. Bemerkung:</u> 1) $1 \in A$ und A Unteralgebra impliziert, dass A alle konstanten Fkten enthält.

2) Polynome erfüllen die beiden Bedingungen (1) und (2) trivialerweise. Das ist aber auch alles, was man über sie wissen muß.

<u>14.4. Satz von Stone-Weierstraß:</u> Sei K ein kompakter (oder topologischer) Raum und $A \subset C(K)$ eine Unteralgebra mit Eins, welche die Pkte von K trennt. Dann ist A dicht in $C(K)$.

<u>14.5. Bemerkung:</u> Beachte, dass dies (durch Übergang zu $\bar{A}$) äquivalent ist zu der Formulierung:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ Unteralgebra mit Eins} \\ A \text{ trennt Pkte} \\ A \text{ abgeschlossen} \end{array}\right\} \Rightarrow A = C(K)$$

In dieser Form werden wir den Satz beweisen.

<u>14.6. Lemma</u>: Sei $A \subset C(K)$ eine abgeschlossene Unteralgebra mit Eins. Dann gilt:

(i) $\left.\begin{array}{l} f \in A \\ f \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{f} \in A$

(ii) $f \in A \Rightarrow |f| \in A$

(iii) $f, g \in A \Rightarrow \begin{array}{l} \min(f,g) \in A \\ \max(f,g) \in A \end{array}$

<u>Beweis</u>: Wegen

$$|f| = \sqrt{f^2}$$

und

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$
$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$

gilt

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)

d.h. wir müssen nur (i) zeigen

Ohne Einschränkung können wir annehmen

$0 \leq f \leq 1$, d.h.

$f = 1 - g$ wobei $0 \leq g \leq 1$

$$\Rightarrow \sqrt{f(t)} = \sqrt{1-g(t)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(t)^n \quad \forall t \in K$$

(Taylorreihe für $\sqrt{1-x}$)

Man kann relativ einfach sehen, dass

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \, 2^{-2n+1} \binom{2n-1}{n} \overset{\text{Stirling}}{<} c \cdot n^{-3/2}$$

für ein $c > 0$

[Dies zeigt, dass Taylorreihe für $\sqrt{1-x}$ auf abg. Intervall $[-1, 1]$ glm. konvergiert, vgl. Forster S 263]

$$\Rightarrow \left\| \sqrt{f} - \left(1 - \sum_{n=1}^{N} a_n g^n\right) \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n g^n \right\|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \underbrace{\|g\|^n}_{\leq 1} \qquad (\text{beachte: } a_n > 0 \ \forall n)$$

$$\leq c \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-3/2}$$

$$\xrightarrow{N \to \infty} 0$$

also: $\underbrace{1 - \sum_{n=1}^{N} a_n g^n}_{\in A} \xrightarrow{N \to \infty} \sqrt{f}$ in $C^1(K)$

$$\Rightarrow \sqrt{f} \in A$$

da A abgeschlossen

$\square$

Beweis von 14.4.: Sei $A \subset C(K)$ abg. Unteralgebra mit Eins, welche die Pkte von K trennt.

Sei $f \in C(K)$, $\varepsilon > 0$

z.z.: $\exists\, g \in A$ so dass $\|f - g\| < \varepsilon$

Betrachte $s, t \in K$, $s \neq t$

A trennt Pkte $\Rightarrow \exists\, h \in A : h(s) \neq h(t)$

Setze (für bel. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

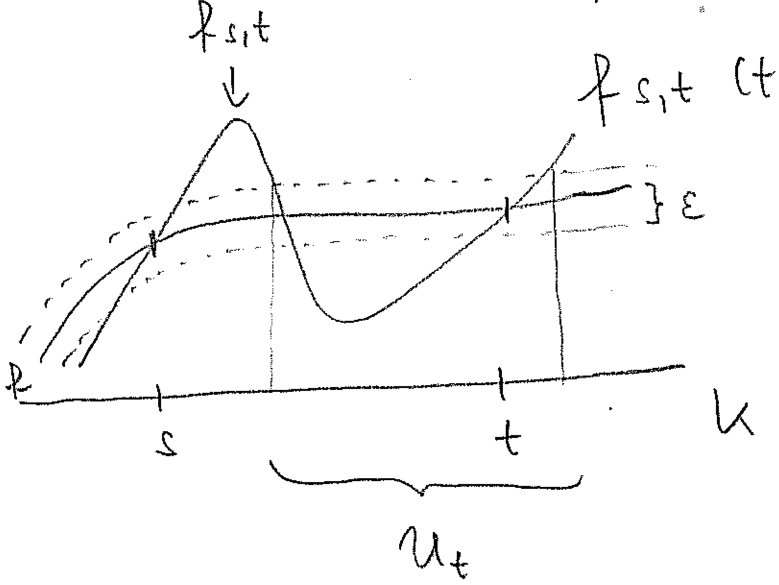
$$\tilde{h}(v) := \mu + (\lambda - \mu)\,\frac{h(v) - h(t)}{h(s) - h(t)} \qquad (v \in K)$$

$\Rightarrow \tilde{h} \in A$ und $\tilde{h}(s) = \lambda$, $\tilde{h}(t) = \mu$

also: $s \neq t \Rightarrow \exists\, f_{s,t} \in A$ mit

$f_{s,t}(s) = f(s)$

$f_{s,t}(t) = f(t)$



Fixiere s und setze

$$U_t := \{ v \in K \mid f_{s,t}(v) < f(v) + \varepsilon \}$$

Es gilt: • U_t offen (da Urbild offener Menge unter stetigen Fkt $f_{s,t} - f$)

• $t \in U_t$

d.h. U_t ist offene Umgebung von t

$\Rightarrow \bigcup_{t \in K} U_t$ offene Überdeckung von K

K kompakt $\Rightarrow \exists$ endliche Teilüberdeckung, d.h. $\exists\, t_1, \dots, t_n \in K$ mit

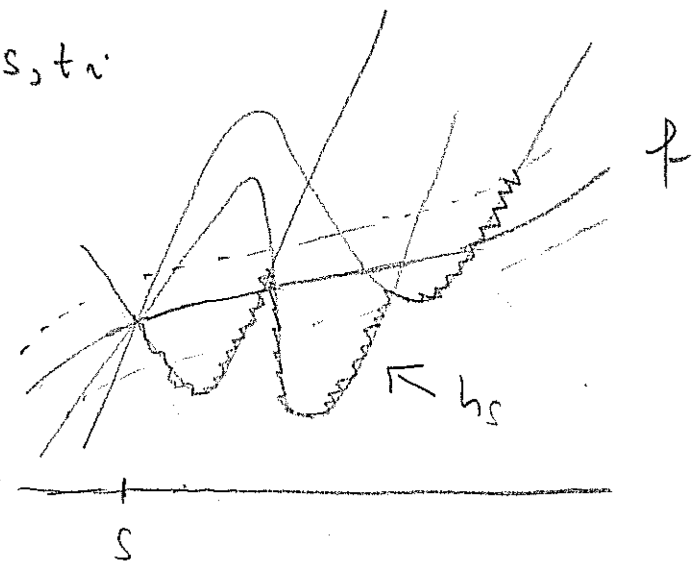
$$K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$$

Setze $h_s := \min_{1 \le i \le n} f_{s,t_i}$

$\Rightarrow h_s \in A$

$h_s(s) = f(s)$

$h_s < f + \varepsilon$



Setze jetzt

$V_s := \{ v \in K \mid h_s(v) > f(v) - \varepsilon \}$

offene Umgebung von s

$\Rightarrow \bigcup_{s \in K} V_s$ offene Überdeckung von K

K kompakt $\Rightarrow \exists$ endliche Teilüberdeckung, d.h.

$\exists\, s_1, \dots, s_m \in K$ s.d.

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} V_{s_j}.$$

Setze $g := \max\limits_{1 \le j \le m} h_{s_j}$

$\Rightarrow \quad g \in A$

und

$$f - \varepsilon < g < f + \varepsilon$$

also: $\|f - g\| < \varepsilon$ $\square$

<u>14.7. Korollar:</u> Sei X kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Algebra aller Polynome $p(x_1, \dots, x_n)$ in den Koordinaten dicht in $C^0(X)$.

($n = 1$ ist klassischer Satz von Weierstraß)

14.8. Korollar: Die Menge aller trigonometrischen Polynome, d.h. endliche Summen der Form

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$
$$(a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}),$$

ist glm dicht im Raum aller 2π-periodischen stetigen Fkten auf $\mathbb{R}$,

$$C_{per}[0,2\pi] = \{ f : [0,2\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \; f(0) = f(2\pi) \}$$

$$\subset C[0,2\pi]$$

Beweis: Beachte zunächst, dass trig. Polynome Algebra bilden, da

$$\sin k \cdot t \cdot \sin lt = \frac{1}{2} \cos(k-l)t - \frac{1}{2}(k+l) \cdot t$$

etc.

Um Stone-Weierstraß zu benutzen, identifiziere

$$C_{per}[0,2\pi] \mathrel{\hat{=}} C(T)$$
$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

$T = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, T kompakt

trig. Polynome in $t \mathrel{\hat{=}}$ Polynomen in Koordinaten x_1, x_2 auf T

$\hat{=}$ dicht in $C(T)$ gemäß 14.7

14.9. Bemerkung: Aus 14.4. erhält man einfach die folgende komplexe Version von Stone-Weierstr.

Sei K kompakter metrischer (oder top.) Raum und

$$C(K, \mathbb{C}) := \{ f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig} \},$$

versehen mit der Supremumsnorm.

Sei $A \subset C(K, \mathbb{C})$ eine Unteralgebra mit Eins, welche die Pkte von K trennt und erfüllt:

$$f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A.$$

Dann ist A dicht in $C(K, \mathbb{C})$.