15 Hilberträume und Fourierreihen

15.1. Def: Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum.

(vgl. 2.20)

15.2 Beispiele: 1) Alle endlichdimensionalen Prähilberträume sind vollständig, also Hilberträume;

insbesondere: $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$

wobei $\langle (x_1, .., x_n), (y_1, .., y_n) \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

2) $C[0, 2\pi] = \{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

ist nicht vollständig, also kein Hilbertraum.

Aber die Vervollständigung bzgl. $\| \cdot \|_2$,

$L^2[0, 2\pi]$

ist auch Prähilbertraum (dehne $\langle , \rangle$ von $C[0, 2\pi]$ nach $L^2[0, 2\pi]$ stetig aus);

somit ist $L^2[0, 2\pi]$ ein (unendlich-dimensionaler) Hilbertraum.

beachte: es gilt auch auf L^2

$\langle f, g \rangle = \int f \cdot g$, wobei $\int$ das Daniel-Int. auf L^1 ist ($f, g \in L^2 \Rightarrow f \cdot g \in L^1$)

Hilberträume sind die besten Verallgemeinerungen von $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}^n$ einfach zu beschreiben durch Zerlegung von Elementen gemäß Basis
$\rightarrow$ gilt auch für allgemeine Hilberträume

<u>15.3. Def</u>: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum

1) $x, y \in \mathcal{H}$ sind <u>orthogonal</u>, $x \perp y$, falls $\langle x, y \rangle = 0$

2) Ein <u>Orthonormalsystem</u> (ONS) ist eine Familie $(e_i)_{i \in I}$, $e_i \in \mathcal{H}$, so dass

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j \in I$$

<u>15.4. Bem</u>: 1) I kann endlich oder unendlich sein. Im letzten Falle kann es abzählbar oder überabzählbar sein. Wir beschränken uns im Folgenden auf Hilberträume, wo jedes ONS abzählbar ist (solche $\mathcal{H}$ heißen <u>separabel</u>). Folgende Theorie gilt aber auch im nicht-separablen Fall (wobei $\sum\limits_{i \in I}$ richtig interpretiert werden muß)

2) Beachte: In Hilberträumen gilt der

<u>Satz von Pythagoras</u>: Falls $x_i \perp x_j \; \forall i \neq j$

dann gilt für endliche Summen

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|^2$$

da:

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle$$

$$= \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle$$

$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

<u>15.5. Satz:</u> Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein ONS in $\mathcal{H}$ und

sei $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \quad (x \in \mathcal{H}, \alpha_i \in \mathbb{R})$

(Für $|I| = \infty$ bedeutet dies: $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \xrightarrow{N \to \infty} x$)

Dann gilt:

$$\alpha_i = \langle x, e_i \rangle$$

<u>Beweis:</u> (für $|I| = \infty$, da andernfalls trivial)

Setze $\quad x_N := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i$

$$\Rightarrow \langle x_N, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \underbrace{\langle e_i, e_k \rangle}_{\delta_{ik}} = \alpha_k \quad \text{falls } N \geq k$$

beachte nun: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist stetig, d.h.

$$\underbrace{\langle x_N, e_k \rangle}_{\alpha_k \ \forall k \leq N} \xrightarrow{N \to \infty} \langle x, e_k \rangle$$

$\Rightarrow \langle x, e_k \rangle = \alpha_k$ □

15.6. Besselsche Ungleichung: Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein ONS in $\mathcal{H}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathcal{H}$:

$$\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Beweis: Setze $s_n := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

$\Rightarrow \langle s_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \quad \forall k \leq n$

$\Rightarrow \langle x - s_n, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \leq n$

$\Rightarrow \langle x - s_n, s_n \rangle = 0$

$$\overset{\text{Pythagoras}}{\Rightarrow} \|x\|^2 = \underbrace{\|x - s_n\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\|s_n\|^2}_{\sum_{i,j=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \cdot \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n$$

$$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

(Beachte: $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$ ist monoton in n und hat somit, da beschränkt, einen Grenzwert) $\square$

<u>15.7. Def.</u>: Eine <u>Orthonormalbasis</u> (ONB) in einem Hilbertraum ist ein maximales ONS, d.h. ein ONS, welches in keinem größeren ONS enthalten ist.

<u>15.8 Satz von Parseval</u>: Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein ONS in $\mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:

(i) $(e_i)_{i \in I}$ ist eine ONB.

(ii) Falls $x \in \mathcal{H}$ und $x \perp e_i \ \forall i \in I$

$$\Rightarrow x = 0$$

(iii) Falls $x \in \mathcal{H}$, dann gilt

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

(iv) Falls $x \in \mathcal{H}$, dann gilt

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2$$

(v) Das lineare Erzeugnis

$$\left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \;\middle|\; N \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ist dicht in $\mathcal{H}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Falls $x \neq 0$, $x \perp e_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow (e_i)_{i \in I} \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ ist größeres ONS

(ii) $\Rightarrow$ (i) klar

(iv) $\Rightarrow$ (iii): $\quad s_n := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \underbrace{\|s_n\|^2}_{= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \xrightarrow[(iv)]{n \to \infty} \|x\|^2}$$

$\Rightarrow \|x - s_n\|^2 \to 0$

d.h. $s_n \to x$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $\quad \underset{(iii)}{s_n \to x} \Rightarrow \|s_n\| \to \underset{(iv)}{\|x\|}$

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Falls $x \perp e_i \quad \forall i \in I$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i \in I} \underbrace{\langle x, e_i \rangle^2}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Betrachte $x \in \mathcal{H}$

Beachte: gemäß Besselsche Ungl. konvergiert

$$\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Setze

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i + y$$

$$\Rightarrow \langle x, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle + \langle y, e_i \rangle \quad \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \langle y, e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in I$$

$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} y = 0$$

(iii) $\Rightarrow$ (v): klar

(v) $\Rightarrow$ (ii): Betrachte $x \in \mathcal{H}$ mit $x \perp e_i \quad \forall i \in I$

$$\overset{(v)}{\Rightarrow} \exists x_n \in \{\sum_{\text{endlich}} \alpha_i e_i\} \text{ mit } x_n \to x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle x_n, x_n \rangle}_{=0 \,\forall n} \xrightarrow{n \to \infty} \langle x, x \rangle$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \qquad \square$$

<u>15.9. Bemerkung:</u> Ist $(e_i)_{i\in I}$ ONB von $\mathcal{H}$, so heißt das: Jedes $x \in \mathcal{H}$ kann geschrieben werden als

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i \rangle e_i \qquad (*)$$

Beachte: falls $\mathcal{H}$ unendlich dimensional, so ist ONB unendlich und $(*)$ ist im allgemeinen unendliche Summe

"ONB" ist verschieden vom Begriff "Basis" aus linearer Algebra, welche nur endliche Summen erlaubt. Im Hilbertraumrahmen sagt man oft einfach "Basis" anstatt "ONB"; die Basis gemäß linearer Algebra heißt dann "Hamel-Basis". Solche Hamel-Basen sind aber uninteressant für Hilbertraumprobleme.

<u>15.10. Beispiel:</u> Betrachte Hilbertraum $L^2[0, 2\pi]$. Da für $k, l \geq 1$ gilt

$$\langle \sin kt, \sin lt \rangle = \int_0^{2\pi} \sin kt \cdot \sin lt \, dt = \delta_{kl} \cdot \pi$$

$$\langle \sin kt, \cos lt \rangle = 0$$

$$\langle \cos kt, \cos lt \rangle = \delta_{kl} \cdot \pi$$

und

$$\langle \sin kt, 1 \rangle = 0 = \langle \cos kt, 1 \rangle$$

$$\langle 1, 1 \rangle = 2\pi$$

ist

$$(*) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin kt, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos lt \qquad (k, l = 1, 2, \dots)$$

ein ONS in $L^2[0, 2\pi]$

Frage: Ist es eine Basis?

<u>15.11. Satz</u>: Das trigonometrische System (*) ist eine ONB von $L^2[0, 2\pi]$

<u>Beweis</u>: Sei Trig das lineare Erzeugnis von (*), d.h. die Menge aller trigonometrischen Polynome

$$a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Gemäß 15.8.(v) reicht es zu zeigen:

Trig ist dicht in $L^2[0, 2\pi]$

Wir wissen: • Trig ist dicht in $C_{per}[0, 2\pi]$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

(nach Stone-Weierstraß, → 14.8)

da $\|f\|_2 \leq 2\pi \|f\|_\infty$, ist Trig also auch dicht in $C_{per}[0, 2\pi]$ bzgl. $\|\cdot\|_2$

- $C^1[0,2\pi]$ ist dicht in $L^2[0,2\pi]$

  bzgl. $\|\cdot\|_2$

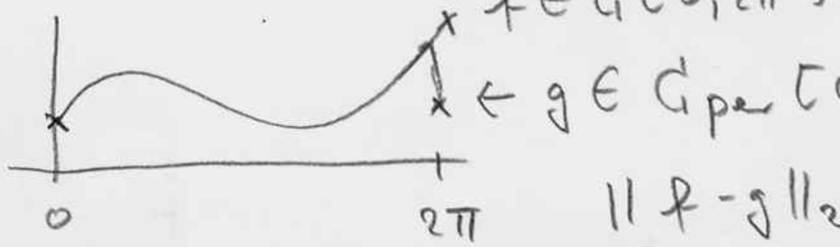
  (da L^2 Vervollständigung von C^1)

somit bleibt zu zeigen:

$C^1_{per}[0,2\pi]$ ist dicht in $C^1[0,2\pi]$

bzgl. $\|\cdot\|_2$

dies ist einfach:



$\|f-g\|_2$ kann beliebig klein gemacht werden! $\square$

<u>15.12 Korollar</u>: Für $f \in L^2[0,2\pi]$ haben wir die Fourierreihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

wobei die Fourierkoeffizienten a_n, b_n gegeben sind gemäß

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n t \, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n t \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

15.13. Bemerkungen: 1) Beachte: Aussage ist bzgl. $\|\cdot\|_2$-Norm. 15.12 sagt also folgendes: Falls wir

$$f_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

setzen, so gilt

$$f_N \xrightarrow{N\to\infty} f \qquad \text{bzgl. } \|\cdot\|_2$$

Wir machen keine Aussage über pktweise Konvergenz. Solche Fragen sind viel schwieriger!

2) Wir wissen, dass $\|\cdot\|_2$-Konvergenz die f.s. pktweise Konvergenz einer Teilfolge impliziert; d.h. für jedes $f \in L^2$ gibt es Folge $(N(k))_{k\in\mathbb{N}}$ so dass

$$f_{N(k)}(t) \xrightarrow{k\to\infty} f(t) \qquad \text{f.ü.}$$

Es war ein offenes Problem für ~ 50 Jahre, ob dies auch wahr ist, wenn man nicht zu einer Teilfolge übergeht, d.h. ob

$$f_N(t) \xrightarrow{N\to\infty} f(t) \qquad \text{f.ü.}$$

Dies wurde von Carleson 1966 bewiesen (→ Abelpreis 2006)

Sehr tiefliegendes Resultat!

3) Macht man stärkere Voraussetzungen über f, so kann man bessere Konvergenzen zeigen. Z.B., falls f 2π-periodisch und in $C^{1,2}$ ist, dann konvergiert die Fourierreihe glm.