16. Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen: Kontraktions- und Kompaktheitsargumente

16.1. Motivation:

Wir wollen folgende Differentialgleichung lösen

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$
$$y(0) = y_0$$

für gegebenes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$y_0 \in \mathbb{R}$

Fragen:
- Existiert eine Lösung?
- Ist sie eindeutig?
- Wie können wir sie berechnen?

Antworten hängen von Eigenschaften von f ab.

allgemeines Prinzip: Formuliere Dgl in Integralgleichung um:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$$

Problem ist dann äquivalent zu Fixpunkt der Abb.

$$y \mapsto Ty$$

wobei

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds$$

Versuche Lösung iterativ zu konstruieren: starte mit Anfangspkt y_1 und betrachte

$$y_{n+1} := T y_n$$

wir hoffen, dass dies für $n \to \infty$ gegen Lösung konvergiert.

Dazu müssen wir kontrollieren:

- Konvergenz
- ist Limes eine Lösung
- Abhängigkeit von y_1

Falls T eine Kontraktion ist, dann funktioniert das alles sehr schön!

16.2. Erinnerung: Banachscher Fixpunktsatz:

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und

$T : X \to X$

eine Kontraktion, d.h. $\exists \lambda$ mit $0 < \lambda < 1$

so dass

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

Dann gilt es einen eindeutigen Fixpunkt

$x_0 \in X$ von T, d.h. $T(x_0) = x_0$.

Außerdem gilt für jedes $x \in X$:

$$\lim_{n \to \infty} T^n(x) = x_0$$

16.3. Bemerkungen: 1) gilt auch für

vollständige metrische Räume

2) Man braucht $\lambda < 1$

$\lambda = 1$ geht nicht

Auch $\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|$

ist nicht ausreichend

16.4. Betrachte wieder Dgl aus 16.1 auf Intervall $[a,b]$, d.h.

$y : [a,b] \to \mathbb{R}$

also $X = C[a,b]$

<u>Annahme:</u> $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt Lipschitz-Bedingung:

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L\,|y-z| \quad \forall\, t \in [a,b],\ y,z \in \mathbb{R}$$

für ein festes $L \in \mathbb{R}$

[z.B.: $y'(t) = 1 + t\,y(t)$

$\leadsto f(t,y) = 1 + t\,y$

$\leadsto |f(t,y) - f(t,z)| = |t| \cdot |y-z|$

$\leadsto L := \max\limits_{t \in [a,b]} |t|$]

Betrachte Integraloperator

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_a^t f(s, y(s))\,ds$$

$a \leq t \leq b$

dann:

$$|(Ty_1)(t)-(Ty_2)(t)| \leq$$

$$\leq \int_a^t \underbrace{|f(s,y_1(s))-f(s,y_2(s))|}_{\leq L\cdot \underbrace{|y_1(s)-y_2(s)|}_{\leq \|y_1-y_2\|}} ds$$

$$\leq L\cdot \|y_1-y_2\|\cdot(t-a) \qquad \forall\, t\in[a,b]$$

$$\Rightarrow \|Ty_1-Ty_2\| \leq L\cdot(b-a)\cdot\|y_1-y_2\|$$

$$\Rightarrow T: C[a,b]\to C[a,b]$$

ist Kontraktion, falls $L\cdot(b-a)<1$

In dem Fall gibt es dann eindeutigen Fixpkt $y\in C[a,b]$ von T, d.h. Lösung von

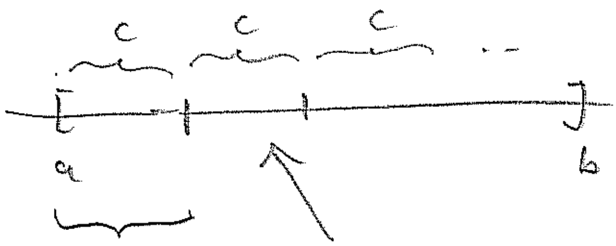
$$y(t)=y_0+\int_a^t f(s,y(s))\,ds$$

oder, äquivalent

$$y'(t)=f(t,y(t)) \quad \text{und} \quad y(a)=y_0$$

Falls $L\cdot(b-a)$ nicht < 1, wähle $c>0$ mit $c-a<\frac{1}{L}$,

löse Gleichung dann auf $[a,a+c]$ (dort ist T dann Kontraktion!), dann auf $[a+c,a+2c]$, usw. bis ganzes Intervall $[a,b]$ überdeckt ist.



löse hier mit vorgeg. $y(a)=y_0$

löse dann hier mit vorg. $y(a+c)$

Dies liefert <u>Satz von Picard-Lindelöf</u> über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Dglen welche Lipschitz-Bed. erfüllen.

16.5 Motivation: Es gibt auch interessante Dglen welche keine Lipschitz-Bedingung erfüllen, wo aber trotzdem Lösung existiert ⇝ allerdings kann Eindeutigkeit verlorengehen.

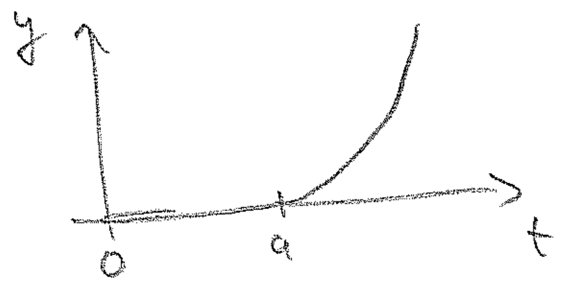
Beispiel:
$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= y(t)^{2/3} \qquad 0 \le t \\ y(0) &= 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

$f(t,y) = y^{2/3}$ ist nicht Lipschitz auf $[0,5]$

aber (*) hat Lösungen, sogar ∞-viele: für jedes $a \geq 0$ ist

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \le a \\ \dfrac{(t-a)^3}{27} & t \geq a \end{cases}$$

eine Lösung



16.6. Satz von Peano: Sei

$$f : [a,b] \times [y_0 - R, y_0 + R] \to \mathbb{R}$$

eine stetige Fkt.

Dann hat die Dgl

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad y(a) = y_0$$

eine Lösung auf $[a, a+h]$, wobei

$$h := \min \{ b-a, \frac{R}{\|f\|_\infty} \}$$

"Beweis": Forme Problem wieder zu Fixpunktproblem um für

$$T : C[a,b] \to C[a,b]$$

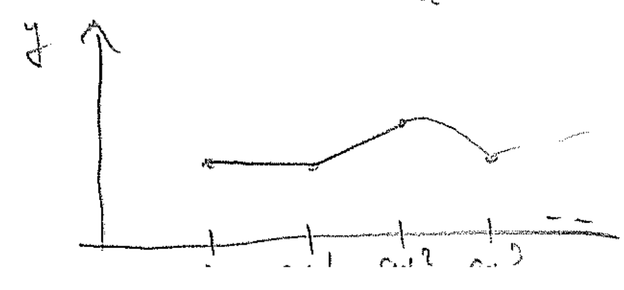
mit

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_a^t f(s, y(s)) \, ds \qquad (*)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $y_n(t)$ auf $[a, a+h]$ durch

$$y_n(t) = y_0 \qquad a \leq t \leq \frac{1}{n}$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_a^{t-\frac{1}{n}} f(s, y_n(s)) \, ds \qquad a + \frac{1}{n} \leq t \leq a+h$$



Beh.: (i) $(y_n)_n$ hat konvergente Teilfolge

(ii) der Grenzwert dieser Teilfolge erfüllt (*)

um (i) zu sehen benutzen wir Arzela-Ascoli:

wir müssen zeigen: $\{y_n\}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig.

beschränkt:

$$|y_n(t) - y_0| \leq \int_a^{t-\frac{1}{n}} \underbrace{|f(s, y_n(s))|}_{\leq \|f\|_\infty} ds$$

$$\leq h \cdot \|f\|_\infty$$

$$\leq R \qquad \forall n, t$$

$$\Rightarrow \|y_n\| \leq |y_0| + R \qquad \forall n$$

gleichgradig stetig:

$$|y_n(t_2) - y_n(t_1)| = \left| \int_{t_1 - \frac{1}{n}}^{t_2 - \frac{1}{n}} f(s, y_n(s))\, ds \right|$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot |t_2 - t_1|$$

$< \varepsilon$ für $|t_2 - t_1|$ hinr. klein (unabh. von n)

$\overset{A-A}{\Longrightarrow}$ $\exists$ convergente Teilfolge $(y_{n(k)})_k$

mit Grenzwert y

(ii) folgt dann relativ einfach

$\Rightarrow$ $\exists$ Lösung y von $(*)$

$\square$