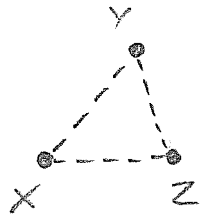
2. Metrische Räume

2.1. Def.:

(a) Eine **Metrik** auf einer Menge X ist eine Funktion $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:



(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

(Dreiecksungleichung)

(b) Ein **metrischer Raum** ist eine Menge X zusammen mit einer Metrik d.

Wir schreiben: (X, d)

2.2. Beispiele:

(a) $X = \mathbb{R}$, $d_{|\cdot|}(x,y) := |x-y|$ (euklidischer

$X = \mathbb{C}$, $d_{|\cdot|}(x,y) := |x-y|$ Abstand)

(b) X bel., $d(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ (diskrete Metrik)

(c) $X = \mathbb{Z}$, $d(x,y) := |x-y|$

(d) $X = C[0,1]$, $d_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty$

2.3. Def.:

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus X heißt

(i) <u>konvergent</u> gegen ein $x \in X$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \quad d(x_n, x) < \varepsilon$$

Wir schreiben dann: $x_n \longrightarrow x$

(ii) <u>Cauchy - Folge</u>, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N: \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

2.4 Bemerkungen:

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X kann höchstens gegen einen Punkt $x \in X$ konvergieren.
Statt "$x_n \to x$" schreiben wir auch "$\lim_{n \to \infty} x_n = x$" und nennen x den <u>Grenzwert</u> der Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

(ii) Jede konvergente Folge in (X, d) ist auch eine Cauchy - Folge.

<u>Beweis:</u> (vgl. Beweis zu Bem. 1.8)

(i) Angenommen: $x_n \longrightarrow x$ <u>und</u> $x_n \longrightarrow y$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann gilt für hinreichend großes n

$$0 \leq d(x, y) \leq \underbrace{d(x, x_n)}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(x_n, y)}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow d(x, y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

(ii) Angenommen: $x_n \longrightarrow x$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N: \quad d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für alle $n, m \geq N$ gilt also:

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x, x_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$\square$

2.5. Def.:

Ein metrischer Raum (X, d) heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gegen ein $x \in X$ konvergiert.

2.6. Beispiele:

- $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$, $(\mathbb{C}, d_{|\cdot|})$ sind vollständig. (Analysis I
- $(C[0,1], d_\infty)$ ist vollständig.
  (nach Satz 1.9)

2.7. Satz (von der kontrahierenden Abbildung, Banachscher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T: X \longrightarrow X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$(*) \quad \exists\, c \in [0,1) \;\; \forall x, y \in X: \quad d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

Dann existiert genau ein $z \in X$ mit

$$T(z) = z \qquad \text{(Fixpunktgleichung)}$$

<u>Zudem</u>: Für jedes $x \in X$ konvergiert die Folge $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z.

<u>Beweis</u>

Nach (*) gilt mit einem $c \in [0,1)$

$$\forall x, y \in X: \quad d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x,y). \qquad (1)$$

Induktiv erhält man, dass

$$\forall x, y \in X \quad d(T^n(x), T^n(y)) \leq c^n \cdot d(x,y) \qquad (2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Für $n=1$ ist (2) nach (1) richtig. Ist (2) für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, so folgt für alle $x, y \in X$

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}(x), T^{n+1}(y)) &= d(T(T^n(x)), T(T^n(y))) \\ &\overset{(1)}{\leq} c \cdot d(T^n(x), T^n(y)) \\ &\overset{IV}{\leq} c \cdot c^n \cdot d(x,y) \\ &= c^{n+1} d(x,y). \end{aligned}$$

Sei $x \in X$ bel.

<u>Behauptung</u>: $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Wegen (2) gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^{n+k}(x)) &= d(T^n(x), T^n(T^k(x))) \\ &\overset{(2)}{\leq} c^n d(x, T^k(x)) \end{aligned} \qquad (3)$$

Weiter gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x, T^k(x)) &\leq d(x, T(x)) + d(T(x), T^2(x)) \\ &\quad + \dots + d(T^{k-1}(x), T^k(x)) \\ &\overset{(2)}{\leq} d(x, T(x)) (1 + c + \dots + c^{k-1}) \\ &\leq M < \infty \end{aligned}$$

für ein $M > 0$. Also: $c^n d(x, T^k(x)) \leq c^n M \longrightarrow 0$

für $n \to \infty$

Nach (3) stellt $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ daher eine Cauchy-Folge dar.

Da X vollständig ist, konvergiert $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $F(x) \in X$.

<u>Behauptung</u>: $\forall x, y \in X: \quad F(x) = F(y)$

Wegen $d(T^n(x), T^n(y)) \overset{(2)}{\leq} c^n \cdot d(x,y) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

folgt: $0 \leq d(F(x), F(y)) \leq d(F(x), T^n(x)) + d(T^n(x), T^n(y)) + d(T^n(y), F(y))$

$\longrightarrow 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow \quad d(F(x), F(y)) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = F(y).$

<u>Also</u>: $z := F(x)$ ist von $x \in X$ unabhängig und $T^n(x) \longrightarrow z$ für <u>jedes</u> $x \in X$.

<u>Behauptung</u>: $T(z) = z$.

$$
\begin{aligned}
d(z, T(z)) &\leq d(z, T^n(z)) + d(T(T^{n-1}(z)), T(z)) \\
&\overset{(2)}{\leq} \underbrace{d(z, T^n(z))}_{\longrightarrow 0} + c\, \underbrace{d(T^{n-1}(z), z)}_{\longrightarrow 0} \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad d(z, T(z)) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = T(z).$

<u>Eindeutigkeit</u>: Sei $z' \in X$ mit $T(z') = z'$ gegeben.

$\Rightarrow \quad z' = T^n(z') \longrightarrow z$ für $n \to \infty$

$\overset{\text{Bem 2.4}}{\Rightarrow} \quad z' = z.$

$\square$

2.8. Beispiele:

1.) $T : [0,3] \longrightarrow [0,3]$, $x \longmapsto T(x) := \sqrt{1+x}$

Beachte: • $[0,3]$ ist vollständig

• T ist monoton, also

$$T([0,3]) = [T(0), T(3)] = [1,2] \subset [0,3]$$

T ist kontrahierend:

$$d(T(x), T(y)) = |\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}|$$

$$= \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \leq \frac{1}{2} d(x,y)$$

Nach Satz 2.7. hat die Gleichung $T(z) = z$ bzw. $\sqrt{1+z} = z$ eine eindeutig bestimmte Lösung in $[0,3]$, nämlich

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}.$$

2.) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $0 < c < 1$ gegeben

<u>Def</u>: $X := C[0,c]$ und $d : X \times X \to [0,\infty)$ durch $d(f,g) := \sup_{x \in [0,c]} |f(x) - g(x)|$.

$T : X \to X$ sei gegeben durch

$$T(f)(x) = a + \int_0^x f(t)\,dt \quad , \; x \in [0,c]$$

<u>Bem</u>: X ist vollständig (vgl. Satz 1.9)

T ist kontrahierend:

$\forall x \in [0,c]$: $|Tf(x) - Tf(y)|$

$$= \int_0^x |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$\leq x \cdot d(f,g) \leq c \cdot d(f,g)$$

$\Rightarrow$ $d(T(f), T(g)) \leq c \cdot d(f,g)$

Nach Satz 2.7 hat die Gleichung $Tf = f$ eine eindeutige Lösung f, d.h.

$$f(x) = a + \int_0^x f(t)\, dt \qquad \forall x \in [0,c]$$

$\Big($ $\Rightarrow$ f ist differenzierbar (Hauptsatz) $\Big)$

$\Leftrightarrow$ $f'(x) = f(x)$ $\forall x \in [0,c]$

und $f(0) = a$.

<u>Also:</u> Auf $[0,c]$ hat die Gleichung

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = a$$

eine eindeutige Lösung,

nämlich $f(x) = a \cdot e^x$.

3) Sei $0 < c < 2$.

$X := \{ f \in C[0,c] \mid f \geq 1 \}$ ist vollständig.

Setze: $Tf(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{f(t)}\, dt$

$T : X \longrightarrow X$ ist kontrahierend:

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq \int_0^x \underbrace{\left| \sqrt{f(t)} - \sqrt{g(t)} \right|}\, dt$$

$$= \frac{|f(t) - g(t)|}{\sqrt{f(t)} + \sqrt{g(t)}} \leq \frac{1}{2} |f(t) - g(t)|$$

$$\leq \frac{1}{2} d(f,g) \cdot x$$

$$\leq \frac{c}{2} d(f,g)$$

$$\Rightarrow \quad d(Tf, Tg) \leq \frac{c}{2} d(f,g)$$

Nach Satz 2.7 hat die Gleichung $Tf = f$ eine eindeutige Lösung, d.h.

$$f(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{f(t)}\, dt$$

$$\left(\Longleftrightarrow \quad f'(x) = \sqrt{f(x)}, \quad f(0) = 1 \right)$$

In vielen Fällen haben Metriken eine spezielle Gestalt.

2.9. Def.:

(a) Sei V ein $\mathbb{K}$ - Vektorraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Norm auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| \ : \ V \longrightarrow [0, \infty) \ , \ x \longmapsto \|x\|$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ , \ \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ , \ x, y \in V$

(Dreiecksungleichung)

(b) Ein normierter Raum ist ein Vektorraum V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$. Wir schreiben: $(V, \|\cdot\|)$

2.10 Bemerkung

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so induziert die Norm $\|\cdot\|$ eine Metrik d auf V durch

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad \forall x, y \in V.$$

Diese ist translationsinvariant, d.h.

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \forall x, y, z \in V.$$

Bezüglich dieser Metrik können wir dann auch in normierten Räumen von

- konvergenten Folgen,
- Cauchy-Folgen und
- Vollständigkeit

sprechen. Einen vollständigen normierten Raum nennen wir auch einen <u>Banachraum</u>.

<u>2.11. Beispiele:</u>

Die in Beispiel 2.2 (a) und (d) angegebenen Metriken werden durch Normen auf den entsprechenden Räumen induziert.

In einigen Fällen werden Normen durch eine stärkere geom. Struktur auf dem Vektorraum induziert.

<u>2.12. Def.</u>

Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle \lambda x_1 + \mu x_2 , y \rangle = \lambda \langle x_1 , y \rangle + \mu \langle x_2 , y \rangle$

$\langle x , \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \overline{\lambda} \langle x , y_1 \rangle + \overline{\mu} \langle x , y_2 \rangle$

(ii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

(iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$ und $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$

(b) Ein <u>Prähilbertraum</u> ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprod. $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Wir schreiben: $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

<u>2.13. Beispiele:</u>

(a) $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, $\quad \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

(b) $V = C[0,1]$, $\quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$

<u>2.14. Satz</u> (von Cauchy-Schwarz):

Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V, so gilt:

(a) $\forall x,y \in V: \quad |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

Hierbei gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

(b) Durch $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ wird eine Norm auf V definiert.

<u>Beweis:</u>

(a) Für alle $\lambda \in K$ gilt:

$$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle$$

<u>1. Fall:</u> $\langle y,y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ Behauptung

2. Fall: $<y,y> \neq 0$

Wähle: $\lambda := -\dfrac{<x,y>}{<y,y>}$

Damit:

$$0 \leq <x,x> + \lambda <y,x> + \bar{\lambda} <x,y> + |\lambda|^2 <y,y>$$

$$= <x,x> - \frac{|<x,y>|^2}{<y,y>} - \cancel{\frac{|<x,y>|^2}{<y,y>}} + \cancel{\frac{|<x,y>|^2}{<y,y>}}$$

$$= <x,x> - \frac{|<x,y>|^2}{<y,y>}$$

$$\Rightarrow \quad |<x,y>|^2 \leq <x,x><y,y>.$$

Ferner:

$$\text{Gleichheit} \iff <x+\lambda y, x+\lambda y> = 0$$

$$\iff x + \lambda y = 0$$

$$\left(\Rightarrow \lambda = -\frac{<x,y>}{<y,y>}\right)$$

(b) z.z (i), (ii), (iii) aus Def 2.9. (a)

zu (i): klar, nach Def. 2.12. (iii)

zu (ii): klar, nach Def. 2.12. (i)

zu (iii): $\|x+y\|^2 = <x+y, x+y>$

$$= <x,x> + <x,y> + <y,x> + <y,y>$$

$$= \|x\|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}(<x,y>)}_{\leq |<x,y>| \overset{(a)}{\leq} \|x\| \cdot \|y\|} + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \, \|y\| + \|y\|^2$$
$$= \left(\|x\| + \|y\| \right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\square$

2.15. Beispiele:

Auf $V = \mathbb{K}^n$ sind durch die folgenden Ausdrücke Normen gegeben:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in V$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j|$$

Die zugehörigen Metriken werden üblicherweise mit d_1, d_2 und d_∞ bezeichnet.

Für $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ rechnet man dies leicht nach. Dass $\| \, \|_2$ eine Norm ist, folgt aus Satz 2.14. (b) angewendet auf das Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_2 := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} \qquad \begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \in V \\ y = (y_1, \dots, y_n) \in V \end{array}$$

(vgl. Beispiel 2.13)

2.16. Def.:

Ist (X,d) ein metrischer Raum, so setzen wir

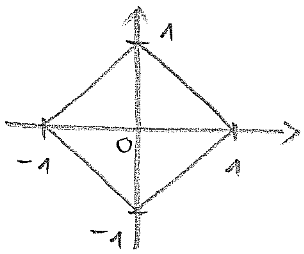
$$B(x,r) := \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$$

für $x \in X$ und $r > 0$. Wir nennen $B(x,r)$ auch die Kugel in (X,d) mit Mittelpunkt x und Radius r.

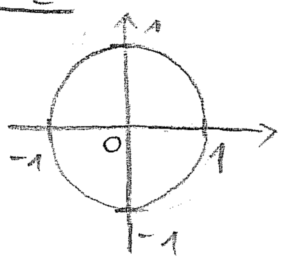
2.17. Beispiel

"Kugeln" in $\mathbb{R}^2$ um 0 bzgl.

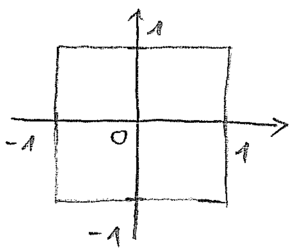
(i) d_1:



(ii) d_2:



(iii) d_∞:



Also gilt:

$$2 \cdot d_\infty \geq d_1 \geq d_2 \geq d_\infty$$

Dies folgt aus

$$2 \max\{|x_1|,|x_2|\} \geq |x_1| + |x_2| \geq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \geq \max\{|x_1|,|x_2|\}$$

2.18 Bemerkung/Erinnerung:

- Die übliche Metrik auf $\mathbb{K}^n$ ist die euklidische Metrik d_2, die von der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ induziert wird.
- Eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}^n$ konvergiert genau dann bzgl. d_2, wenn sie komponentenweise konvergiert, d.h. wenn für $j=1,\dots,n$ die Folgen $(x_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ bzgl. dem euklidischen Abstand $|\cdot|$ konvergieren.
- $(\mathbb{K}^n, d_2)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

2.19. Bemerkung:

(a) Auf $C[0,1]$ ist durch

$$<f,g> := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

ein Skalarprodukt gegeben.

(vgl. Beispiel 2.13)

Nach Satz 2.14 gilt daher für alle $f,g\in C[0,1]$

$$\left|\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |g(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

und durch

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

wird eine Norm $\|\cdot\|_2$ auf $C[0,1]$ definiert.

Diese stimmt offenbar nicht mit der sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$ aus Kapitel 1 überein. Diese sind sogar nicht <u>äquivalent</u>:

(e) Wir haben für alle $f \in C[0,1]$

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \leq \|f\|_\infty^2 \int_0^1 dt = \|f\|_\infty^2,$$

also $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.

<u>Aber:</u> Es gibt kein $c > 0$ mit

$$\|f\|_\infty \leq c \cdot \|f\|_2 \quad \forall f \in C[0,1].$$

<u>Denn:</u>

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto \begin{cases} \sqrt{1-n\cdot t}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty = 1$$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{1/n} (1-nt) \, dt = \left[t - \tfrac{1}{2} n t^2 \right]_0^{1/n} = \frac{1}{2n}$$

Also: $f_n \longrightarrow 0$ bzgl. $\|\cdot\|_2$

aber <u>nicht</u> bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

<u>Damit:</u>

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \quad \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \cancel{\Longleftarrow} \end{array} \quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

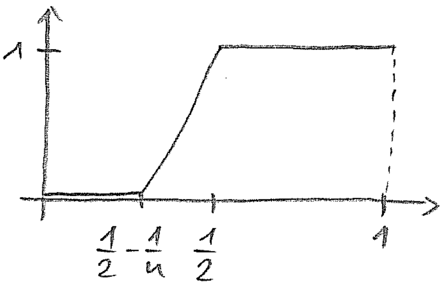
$\|\cdot\|_2$ ist <u>schwächer</u> als $\|\cdot\|_\infty$.

(c) Ist $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ vollständig ?

$C[0,1]$ ist bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ vollständig (vgl. Satz 1.9) aber <u>nicht</u> bzgl. $\|\cdot\|_2$.

<u>Denn:</u>

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

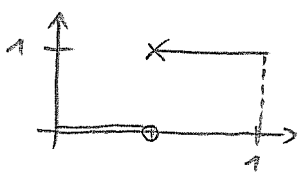


$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^1 \underbrace{|f_n(t) - f_m(t)|^2}_{\substack{\neq 0 \text{ nur für } \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (n \leq m) \\ \leq 1 \text{ immer.}}} dt$$

$$\leq \frac{1}{n}$$

$\Longrightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$

Aber: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen keine Funktion in $C[0,1]$.

Genauer: $f_n \longrightarrow$  unstetig!

Man muss also $C[0,1]$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ "vervollständigen", ähnlich wie $\mathbb{Q}$ vervollständigt werden musste, um $\mathbb{R}$ zu erhalten.

2.20. Def.:

Einen Prähilbertraum, der bzgl seiner induzierten Norm vollständig ist, nennt man <u>Hilbertraum</u>.

2.21. Beispiel

(i) $(\mathbb{K}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ ist ein Hilbertraum.

(ii) $(C[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ ist <u>kein</u> Hilbertraum