3. Topologie metrische Räume

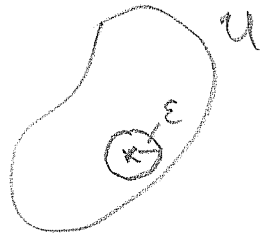
3.1. Definition: Sei (X, d) metrischer Raum.

1) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt <u>offen</u>, wenn

$$\forall x \in U \;\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U$$

$$\uparrow$$

$$\{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$



2) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn $X \setminus A$ offen ist

3.2. Bemerkungen: 1) $\emptyset \subset X$ ist offen

2) $X \subset X$ ist offen

3) Somit ist X sowohl offen als auch abgeschlossen (da $X \setminus X = \emptyset$ offen), d. h. "offen" und "abgeschlossen" schließen sich nicht gegenseitig aus, und sind auch keine Negationen.

3.3. Beispiele: 1) Sei X "diskreter" metrischer Raum

mit $d(x,y) = \begin{cases} 0 & y = x \\ 1 & y \neq x \end{cases}$

Dann ist jede Teilmenge von X offen und abgeschlossen

2) Jede Kugel $B(x, \varepsilon)$ $(x \in X, \varepsilon > 0)$ in metrischen Raum X ist offen

3.4. Satz: Für die offenen Mengen in einem metrischen Raum X gilt:

(a) $\emptyset$ und X sind offen

(b) $U_1, \dots, U_n$ offen $\Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n$ offen

(c) Für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen U_i in X ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

beachte: (b) gilt nur für endlich viele Durchschnitte;

z.B. $\underbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)}_{\text{offen } \forall n} = \{1\}$ ← nicht offen

Beweis: (a) ✓

(b) Sei $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n$

U_i offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_i > 0 : B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$
$x \in U_i$

Setze $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$

$\overset{\varepsilon \leq \varepsilon_i}{\Longrightarrow} B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset U_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

(c) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, d.h. $\exists j \in I : x \in U_j$

U_j offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

3.5. Bemerkungen: 1) Somit folgt: Jede offene Menge ist Vereinigung von Kugeln (da jede Kugel offen)

2) Ein System von Teilmengen einer Menge X, die die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllt, heißt Topologie auf X; X gemeinsam mit Topologie heißt topologischer Raum. Es gibt topologische Räume, die nicht von Metriken kommen.

3) Für die abgeschlossenen Mengen in X gilt:

(a) $\emptyset, X$ abgeschlossen

(b) $A_1, \dots, A_n$ abgeschlossen $\Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n$ abg.

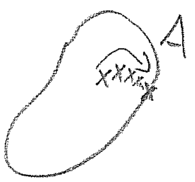
(c) Für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ von abg. Mengen $A_i \subset X$ ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ abg.

Beweis: (b) $X \setminus \bigcap A_i = \bigcup (X \setminus A_i)$

(c) $X \setminus \bigcup A_i = \bigcap (X \setminus A_i)$ □

3.6. Satz: $A \subset X$ abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ $\forall$ Folgen (x_n), $x_n \in A$, die gegen ein $x \in X$ konvergieren, gilt $x \in A$



Beweis: "$\Rightarrow$" Sei A abg.

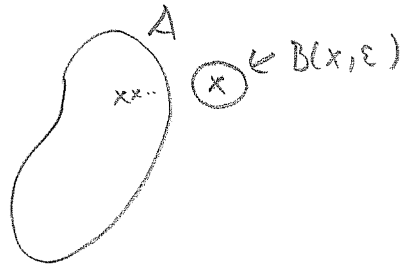
Betrachte $x_n \in A$, mit $x_n \to x \in X$

Annahme: $x \notin A$, d.h. $x \in X \setminus A$ ← offen

d.h. $\exists\, \varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) \subset X \setminus A$

d.h. $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

Wdsp zu $x_n \to x$



"$\Leftarrow$" Beweis durch Kontraposition, d.h. wir zeigen:

$A \subset X$ nicht abg. $\Rightarrow$ $\exists$ Folge (x_n), $x_n \in A$ mit

$$x_n \to x \notin A$$

Sei $A \subset X$ nicht abg., d.h. $X \setminus A$ nicht offen,

d.h. $\exists\, x \in X \setminus A$ so dass jede Kugel $B(x,\varepsilon)$

Elemente von A enthält

Sei $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ solch ein Element für $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Dann gilt $x_n \to x$ (da $d(x,x_n) = \frac{1}{n} \to 0$)

und $x_n \in A$ $\forall n$

aber $x \notin A$ $\square$

<u>3.7. Beispiele</u>: (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist nicht abg.

(beachte: Abgeschlossenheit ist relativ zu einem gegebenen Raum; $\mathbb{Q}$ selbst ist auch metrischer Raum und dort ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$ natürlich abgeschl.)

(b) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ abg.

(c) $(a,b) \subset \mathbb{R}$ offen, aber nicht abg.

(d) $(a,b] \subset \mathbb{R}$ weder offen noch abg.

3.8. **Bemerkung:** Zwei Metriken d_1, d_2 auf X heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit

$$d_1(x,y) \le c_1\, d_2(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$
$$d_2(x,y) \le c_2\, d_1(x,y)$$

Eine Folge (x_n) konvergiert für d_1 genau wie auch für d_2 gegen x konvergiert
$(d_1(x_n,x) \to 0 \iff d_2(x_n,x) \to 0)$

Somit haben d_1 und d_2 dieselben abg. und dieselben offenen Mengen

3.9. **Definition:** Sei Y Teilmenge des metrischen Raumes X. Der *Abschluss* $\overline{Y}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die Y enthalten,

$$\overline{Y} := \bigcap_{\substack{A \text{ abg.} \\ A \supset Y}} A$$

d.h. $\overline{Y}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die Y enthält.

3.10. **Beispiele:** Für $X = \mathbb{R}$ gilt:

$\overline{(a,b)} = [a,b]$

$\overline{(a,b]} = [a,b] \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\overline{[a,b]} = [a,b]$

3.11. Behauptung: $\overline{Y}$ ist genau die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Folgen in Y.

Beweis: Sei H die Menge all dieser Grenzwerte

Dann gilt $Y \subset H$ ($Y \hat{=}$ Grenzwerte von konstanten Folgen)

und $H \subset \overline{Y}$ (da $\overline{Y}$ abgeschlossen und Folgen in Y auch Folgen in $\overline{Y}$ sind)

Wir behaupten: H ist abgeschlossen

(daraus folgt dann direkt Beh.)

denn: Sei (h_n) Folge in H mit $h_n \to z \in X$

Da h_n Grenzwert von Folge in Y gibt es $y_n \in Y$ mit $d(h_n, y_n) < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow d(z, y_n) \leq \underbrace{d(z, h_n)}_{\to 0} + \underbrace{d(h_n, y_n)}_{\to 0} \quad \text{für } n \to \infty$$

d.h. $y_n \to z$ und $y_n \in Y \ \forall n$

d.h. $z \in H$!?

3.12. Satz: Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung.

Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1) $x_n \to x$ in $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ in Y

(2) $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$d(x, z) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$

(3) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist

$f^{-1}(U) \subset X$ offen

(4) Für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$

ist $f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen

Beweis: Wir zeigen: (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (4): Sei $A \subset Y$ abgeschlossen

z.z.: $f^{-1}(A)$ abg.

Sei $x_n \in f^{-1}(A)$ mit $x_n \to x \in X$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \underset{A}{\underset{\cap}{f(x_n)}} \to f(x)$$

$\overset{A \text{ abg.}}{\Longrightarrow} f(x) \in A$, d.h. $x \in f^{-1}(A)$ ✓.

(4) $\Rightarrow$ (3): $f^{-1}(\underbrace{Y \setminus U}_{\text{abg.}}) = \underbrace{X \setminus f^{-1}(U)}_{\text{abg.}}$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(U)$ offen ✓.

(3) $\Rightarrow$ (2): Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow U := f^{-1}(\underbrace{B(f(x), \varepsilon)}_{\text{offen}})$ offen nach (3) und $x \in U$

d.h. $\exists \delta > 0$: $B(x, \delta) \subset U$

d.h. $f(B(x, \delta)) \subset f(U) \subset B(f(x), \varepsilon)$ ✓.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $x_n \to x$ in X; sei $\varepsilon > 0$ 3-8

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\exists \delta > 0 : d(x_n, x) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$

Wähle N so groß, dass $d(x_n, x) < \delta \;\; \forall n \geq N$

dann gilt: $d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \;\; \forall n \geq N$

d.h. $f(x_n) \to f(x)$ in Y. □

3.13. Definition: Eine Abbildung

$f : (X, d) \to (Y, d')$

zwischen zwei metrischen Räumen heißt stetig, falls eine (und damit alle) der äquivalenten Bedingungen aus 3.12. erfüllt ist.

3.14. Bemerkung: f heißt stetig im Pkt $x_0 \in X$, falls gilt: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

Dies ist äquivalent zu:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

3.14. Definition: $f : X \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, falls

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$