4. Kompaktheit in metrischen Räumen

4.1. Definition: Sei A Teilmenge eines metrischen Raumes X. 1) Eine offene Überdeckung von A ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Teilmengen von X mit $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

2) A heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. wenn endlich viele $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ existieren mit $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

3) A heißt folgenkompakt, falls jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Pkt in A konvergiert

Ziel: Wir wollen zeigen:

kompakt = folgenkompakt

in metrischen Räumen

4.2. Beispiele: 1) $A = (0, 1]$ ist

- nicht folgenkompakt:

$$\underset{A}{\overset{\cap}{x_n}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin A$$

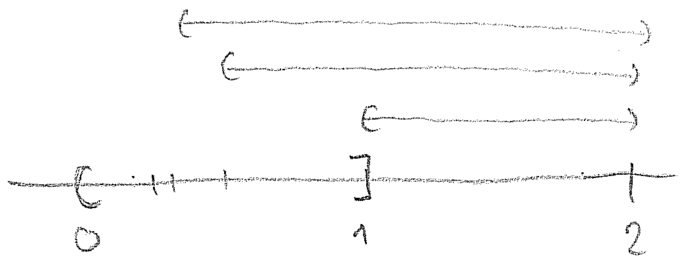
, d.h. keine Teilfolge konvergiert gegen Pkt in A

- nicht kompakt

$\mathcal{U}_n = (\frac{1}{n}, 2)$

$\Rightarrow \bigcup \mathcal{U}_n = (0, 2) \supset (0, 1]$

d.h. $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist offene Überdeckung von $(0, 1]$; aber diese hat keine endliche Teilüberdeckung



3) $A = \mathbb{R}$ ist

- nicht folgenkompakt:

  $x_n = n$ hat keine konvergente Teilfolge

- nicht kompakt

  $\mathcal{U}_n := (-n, n) \Rightarrow \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$

  $\Rightarrow (\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, aber ohne endliche Teilüberdeckun

2) $A = [0,1]$ ist

- folgenkompakt

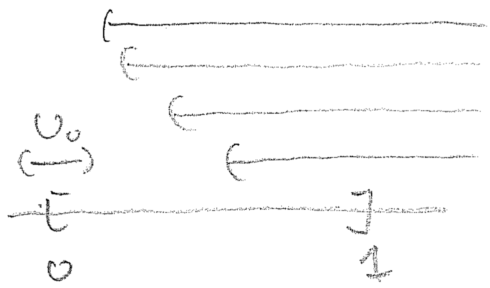
  da jede Folge in A nach Bolzano-Weierstraß eine in A konvergente Teilfolge besitzt

- kompakt

  Als Beispiel betrachte offene Überdeckung

  $$\mathcal{U}_n = \left(\tfrac{1}{n}, 2\right), \quad \mathcal{U}_0 = B(0,\varepsilon)$$

  (für $\varepsilon > 0$)

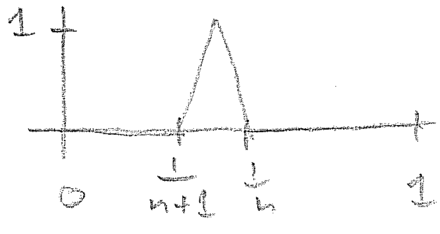


$\Rightarrow \{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m\}$ ist, für $\frac{1}{m} < \varepsilon$, endliche Teilüberdeckung

4) Sei $X = C[0,1]$ mit sup-Norm $\|\cdot\|$

$$A := \overline{B(0,1)} = \{ f \in C[0,1] \mid \|f\| \le 1 \}$$

Betrachte

$f_n :=$ 

$\Rightarrow \|f_n\| = 1$, $f_n \in A$

$\|f_n - f_m\| = 1 \quad \forall\, n \neq m$

$\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge

d.h. A nicht folgenkompakt

Beh: A ist nicht kompakt

denn: Betrachte offene Überdeckung

$(U_f)_{f\in C[0,1]}$ mit

$U_f = B(f, \frac{1}{4}) = \{ g \in C[0,1] \mid \|g-f\| < \frac{1}{4}$

Annahme: Es gibt endliche Teilüberdeckung

$\{U_{h_1}, \dots, U_{h_n}\}$

Da $\|f_n - f_m\| = 1 \Rightarrow$ jedes U_{h_i} enthält

höchstens ein f_n, d.h. $\{U_{h_1}, \dots, U_{h_n}\}$

kann nicht alle f_n überdecken

$\Rightarrow$ gibt keine endliche Teilüberdeckung

Beachte: Grund für Nichtkompaktheit

(d.h. keine endliche Teilüberdeckung) ist

hier, dass man A nicht mit endlich vielen

Kugeln vom Radius 1/4 überdecken kann.

4.3. Definition: $A \subset X$ heißt total beschränkt (oder präkompakt), falls es für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_n \in X$ gibt, so dass
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

4.4. Beispiele: 1) Obiges zeigt:
$B(0,1) \subset C[0,1]$ ist nicht total beschränkt

2) Beachte: $[0,1)$ ist total beschränkt
(für jedes $\varepsilon > 0$ kann man es mit endlich vielen offenen Intervallen der Länge ε überdecken)
Grund für Nichtkompaktheit hier ist:
$[0,1)$ ist nicht vollständig

Wir werden sehen:

$$\text{kompakt} = \text{vollständig} + \text{total beschränkt}$$

"keine Löcher" "klein"

(*) 4.5. Satz von B-L:

4.5. Bemerkung: Ist (X,d) metrischer Raum und $A \subset X$, so ist auch (A, d) metrischer Raum und die Fragen nach Kompaktheit, Folgenkompakt. Vollständigkeit und totale Beschränktheit von A

haben gleiche Antwort in (X,d) wie in (A,d)

(Beachte, dass dies z.B. nicht für "offen" gilt: $A \subset A$ ist immer offen, aber $A \subset X$ ist dies nicht

Somit genügt es im folgenden Beweis metrische Räume zu betrachten (statt Teilräume von metrischen Räumen), d.h. wir betrachten nur den Fall $A = X$

4.5. Satz von Borel-Lebesgue: Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent für $A \subset X$:

(1) A ist kompakt.

(2) A ist folgenkompakt.

(3) A ist vollständig und total beschränkt.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2). Betrachte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X

Annahme: (x_n) hat keine konvergente Teilfolge

Wir können annehmen: $x_n \neq x_m \quad \forall n \neq m$

(ansonsten muss konvergente TF existieren)

$\Rightarrow \exists$ Kugel $U_n = B(x_n, \varepsilon_n)$ so dass

$x_m \notin U_n \quad \forall m \neq n$

(ansonsten gäbe es TF die gegen x_n konvergiert)

Betrachte $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\Leftarrow$ abg. nach 3.6.

also $U_0 := X \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ offen

und somit $U_0 \cup (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung von X

X kompakt $\Longrightarrow$ $\exists$ endliche Teilüberdeckung

aber: diese kann nicht die ∞-vielen Pkte x_n überdecken

$\Rightarrow$ Wdsp

$\Rightarrow$ $(x_n)_n$ hat konvergente Teilfolge

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X

$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $\exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$

d.h. $x_{n(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x$

aber dann: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

(da $d(x_m, x) \leq d(x_m, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x)$)

Somit ist X vollständig

Annahme: X ist nicht total beschränkt,

d.h. für ein $\varepsilon > 0$ kann X nicht mit endlich vielen ε-Kugeln überdeckt werden

Wähle: $x_1 \in X$

$x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon)$

$x_3 \in X \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$

usw.

gemäß Annahme, $B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon) \neq X$,

d.h. wir finden jeweils ein x_{n+1}

$\Rightarrow$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Eigenschaft

$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon \quad \forall n \neq m$

$\Rightarrow$ $(x_n)_n$ kann keine konvergente Teilfolge besitzen

Wdsp

$\Rightarrow$ X ist total beschränkt

(3) $\Rightarrow$ (2) : analog zu Beweis von Bolzano-Weierstraß

Betrachte Folge $(x_n)_n$ in X

ohne Einschränkung können wir annehmen:

$x_n \neq x_m \quad \forall n \neq m$ (sonst fertig)

X total beschränkt $\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \; \exists y_1^{(N)}, \dots, y_{r(N)}^{(N)}$

s.d. $X \subset B(y_1^{(N)}, \frac{1}{N}) \cup \dots \cup B(y_{r(N)}^{(N)}, \frac{1}{N})$

$N=1: \; X \subset B(y_1^{(1)}, 1) \cup \dots \cup B(y_{r(1)}^{(1)}, 1)$

...

mindestens eine dieser Mengen enthält ∞-viele Elemente von $(x_n)_n$

$\hookrightarrow$ wähle solche Teilfolge $(x_{n(k)})_k$ (die ganz in einer der Kugeln liegt

$N=2: \; X \subset B(y_1^{(2)}, \tfrac{1}{2}) \cup \dots \cup B(y_{n(2)}^{(2)}, \tfrac{1}{2})$

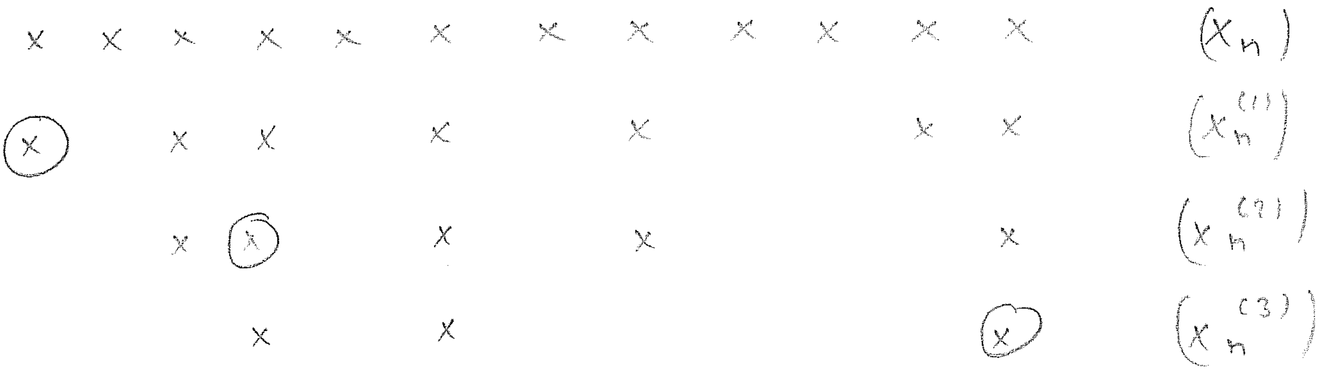
...

mindestens eine dieser Mengen enthält ∞-viele Elemente von $(x_{n(k)})_k$

↳ wähle solche Teilfolge $(x_{n(k(l))})_l$

Durch Iterieren erhalten wir Folgen $(x_n^{(k)})_n$ mit:

- $(x_n^{(k+1)})_n$ ist Teilfolge von $(x_n^{(k)})_n$
- die Folge $(x_n^{(k)})_n$ ist enthalten in Kugel vom Radius $1/k$



Wähle "Diagonalfolge" $(z_n)_n$ mit

$z_n := x_n^{(n)}$

$\Rightarrow (z_n)$ ist Cauchyfolge (da, für $n \geq k$, $z_n \in \{x_m^{(k)} \mid m\}$ und somit in Kugel vom Radius $1/k$)

X vollständig $\Rightarrow (z_n)_n$ konvergiert gegen $z \in X$

$\uparrow$

Teilfolge der ursprünglichen Folge $(x_n)_n$

(2) $\Rightarrow$ (1): Betrachte offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X

Behauptung: $\exists r > 0 \; \forall x \in X : B(x, r) \subset U_i$ für ein $i \in I$

Übungsaufgabe

Wir wissen: (2) $\Rightarrow$ (3), somit ist X insbesondere total beschränkt, d.h.

$X \subset B(y_1, r) \cup \ldots \cup B(y_k, r)$ für $y_1, \ldots, y_k \in X$

aber, gemäß Beh.:

jedes $B(y_j, r) \subset U_{i(j)}$ für ein $i(j)$

$\Rightarrow X \subset B(y_1, r) \cup \ldots \cup B(y_k, r)$

$\subset U_{i(1)} \cup \ldots \cup U_{i(k)}$

somit ist $U_{i(1)}, \ldots, U_{i(k)}$ eine endliche Teilüberdeckung $\square$

<u>4.7. Satz:</u> Sei $f: X \to Y$ stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist für jede kompakte Teilmenge K von X auch das Bild $f(K)$ kompakt.

<u>Beweis:</u> Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$

$\Rightarrow (\underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{offen nach 3.12}})_{i \in I}$ offene Überdeckung von K

K kompakt $\Rightarrow \exists$ endliche Teilüberdeckung

$f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_k})$

$\Rightarrow U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ ist endliche Teilüberdeckung von $f(K)$ $\square$

<u>4.8. Satz:</u> Seien K, Y metrische Räume und K kompakt. Dann ist jede stetige Abbildung $f: K \to Y$ sogar gleichmäßig stetig.

<u>Beweis:</u> Ann.: f nicht glm stetig, d.h.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta = \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}) \ \exists x_n, y_n \in K$ mit

$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, aber $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$

K kompakt, also folgenkompakt, d.h.

$\exists$ konvergente Teilfolgen $(x_{n(k)})_k$ und $(y_{n(k)})_k$

(wähle erst TF $(x_{n(k)})_k$ die konvergiert und dann

Teilfolge von $(y_{n(k)})$ die auch konvergiert)

also: $x_{n(k)} \to x$ für $k \to \infty$
$y_{n(k)} \to y$

$$\Rightarrow d(x,y) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{d(x_{n(k)}, y_{n(k)})}_{< \frac{1}{n(k)}} = 0$$

$\Rightarrow x = y$

f stetig $\Rightarrow f(x_{n(k)}) \to f(x)$

$f(y_{n(k)}) \to f(y) = f(x)$

$$\Rightarrow d(f(x_{n(k)}), f(y_{n(k)})) \to 0$$

Wdsp zu $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \quad \forall n$ $\square$

4.8. Satz: Sei K kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes. Dann nimmt jede stetige Fkt $f: K \to \mathbb{R}$ ihr Supremum und Infimum auf K an.

Beweis: ~~$f(K)$ ist kompakt, nach 4.7~~

Sei $\alpha := \inf_{x \in K} f(x)$ (wobei $\alpha = -\infty$ möglich)

$\Rightarrow \exists\, x_n \in K$ mit $f(x_n) \to \alpha$ für $n \to \infty$

K kompakt $\Rightarrow \exists$ konvergente TF $x_{n(k)} \to x \in K$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow f(x_{n(k)}) \to f(x)$$

$$\downarrow \qquad \Rightarrow \alpha = f(x)$$

$$\alpha$$

□