# 5. Die Sätze von Heine-Borel und Arzelà-Ascoli

5.1. Satz: Jede kompakte Teilmenge $K$ eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt (d.h. $K$ liegt in einer Kugel $B(x,r)$ für ein $x$ und hinreichend großes $r$).

Beweis: $K$ abg: Sei $(x_n)_n$ in $K$ mit $x_n \to x$

z.z.: $x \in K$ (nach 3.6 ist $K$ dann abg.)

$K$ kompakt $\Rightarrow \exists$ TF $(x_{n(k)})_k$ mit $x_{n(k)} \to y \in K$

da notwendigerweise $y = x \Rightarrow x \in K$ %

$K$ beschränkt: Sei $x \in K$.

$(B(x,n))_{n \in \mathbb{N}}$ bilden offene Überdeckung von $K$ (da $y \in K$, $d(x,y) < n$ für ein $n \Rightarrow y \in B(x,n)$)

$\overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ endliche Teilüberdeckung

$B(x,n_1), \dots, B(x,n_k)$

o.E. $n_1 < \dots < n_k$, d.h. $B(x,n_1) \subset \dots \subset B(x,n_k)$

$\Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x,n_i) = B(x,n_k)$

□

5.2. Motivation: Wir haben

kompakt $\Rightarrow$ abg. + beschränkt

Frage: Gilt auch die Umkehrung, d.h. sind Abgeschlossenheit und Beschränktheit hinreichend für Kompaktheit

Antwort: manchmal ja, manchmal nein

$\mathbb{R}^n$ — Heine-Borel

$C[0,1]$ — man braucht mehr → Arzelà-Ascoli

beachte: $\mathbb{R}^n$ ist endlich-dimensionaler Vektorraum, während $C[0,1]$ unendlich-dimensional ist

Die Theorie unendlich dimensionaler VR ist viel komplizierter (und damit auch interessanter) als die endlich-dimensionaler VR

5.3 Satz von Heine-Borel: Eine Teilmenge $K$ von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

<u>Beweis:</u> Sei $(x_k)_k$ Folge in $K \subset \mathbb{R}^n$

z.z.: $\exists$ konvergente TF mit Grenzwert in $K$

Sei $x_k = (x_k^{(1)}, .., x_k^{(n)})$ mit $x_k^{(i)} \in \mathbb{R}$

$(x_k)_k$ beschränkt in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ jede Folge $(x_k^{(i)})_k$ beschränkt in $\mathbb{R}$
$(i=1,..,n)$

also: $(x_k^{(1)})_k$ beschränkt in $\mathbb{R}$

$\xRightarrow[\text{Weierstraß}]{\text{Bolzano}}$ $\exists$ konvergente TF $(x_{k(\ell)}^{(1)})_\ell$

Betrachte nun $(x_{k(\ell)}^{(2)})_\ell$ ; ist beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$\xRightarrow{B-W}$ $\exists$ konvergente TF $(x_{k(\ell(p))}^{(2)})_p$

beachte: $(x_{k(\ell(p))}^{(1)})_p$ ist TF von $(x_{k(\ell)}^{(1)})_\ell$
und konvergiert somit auch

Iteriere $n$-mal

$\Rightarrow$ $\exists$ TF $(x_{k(\nu)})_\nu$ von $(x_k)_k$, so dass
alle Komponenten $(x_{k(\nu)}^{(i)})_\nu$ in $\mathbb{R}$ konvergieren,
d.h. aber dass $(x_{k(\nu)})_\nu$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert (vgl. 2.1[illegible]

Da $K$ abg. $\Rightarrow$ Grenzwert liegt in $K$ $\square$

5.4. Beispiel: 1) Somit gilt also z. B.: die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$

$$\overline{B(0,1)} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$$

ist kompakt

2) Wie 4.2.4 zeigt, gilt dies nicht im $\infty$-dimensionalen Fall: In $C[0,1]$ ist die abgeschlossene Einheitskugel

$$\overline{B(0,1)} = \{ f \in C[0,1] \mid \|f\| \leq 1 \}$$

nicht kompakt

(diese ist zwar beschränkt, aber nicht total beschränkt!) (bzw. total Beschränktheit)

Frage: Können wir Kompaktheit hier noch besser charakterisieren?

5.5. Motivation: Betrachte in $C[0,1]$ $f_n \to f$. Dann gilt

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für } n \geq N}} + \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für} \\ |x-y| < \delta}} + \underbrace{|f(y) - f_n(y)|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für} \\ n \geq N}}$$

außerdem haben wir noch die endlich vielen Bed.

$|f_1(x) - f_1(y)| < \varepsilon$ für $|x-y| < \delta_1$

$\vdots$

$|f_{N-1}(x) - f_{N-1}(y)| < \varepsilon$ für $|x-y| < \delta_{N-1}$

also gilt für alle $n$:

$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall\, |x-y| < \tilde{\delta} := \min(\delta_1, \dots, \delta_{N-1}, \delta)$

$\uparrow$

Stetigkeitsbedingung für die ganze Familie $(f_n)$ mit gleichem $\tilde{\delta}$

$\longrightarrow$ $(f_n)$ ist "gleichgradig stetig"

5.6. Definition: Eine Teilmenge $A \subset C[0,1]$ heißt gleichgradig stetig, falls

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ so dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall |x-y| < \delta \quad \forall f \in A$$

(dasselbe $\delta$ für alle $f \in A$!) "one $\delta$ to rule them all"

5.7. Bemerkung: Es gilt:

$A$ gleichgradig stetig $\Rightarrow$ $\bar{A}$ gleichgradig stetig

Übungsaufgabe!

5.8. Satz von Arzelà - Ascoli: Eine Teilmenge $K$ von $C[0,1]$ ist kompakt genau dann wenn sie abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $K$ kompakt

$\overset{5.1}{\Longrightarrow}$ $K$ ist abgeschlossen und beschränkt

Ann: $K$ ist nicht gleichgradig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta = \tfrac{1}{n} \ \exists x_n, y_n \in [0,1], f_n \in K:$$

$$|x_n - y_n| < \tfrac{1}{n}, \text{ aber } |f_n(x_n) - f_n(y_n)| > \varepsilon$$

$\Rightarrow$ keine T.F. von $(f_n)_n$ ist gleichgradig stetig

aber: $K$ kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge von $(f_n)$

$\overset{5.5}{\Longrightarrow}$ diese Teilfolge ist gleichgradig stetig

Wdsp, d.h. $K$ ist gleichgradig stetig

"$\Leftarrow$" Betrachte $(f_n)_n$ in $K$

2.2.: $\exists$ konvergente Teilfolge

Wir zeigen zunächst: $\exists$ Teilfolge die punktweise an rationalen Argumenten konvergiert

Sei dazu $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$

dann: $(f_n(x_1))_n$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$\xRightarrow[\text{Weierstraß}]{\text{Bolzano}}$ $\exists$ konvergente Teilfolge $(f_{n(k)}(x_1))_k$

setze $y_1 := \lim\limits_{k\to\infty} f_{n(k)}(x_1)$

Nun betrachte

$(f_{n(k)}(x_2))_k$

dies ist beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$\xRightarrow{\text{B-W}}$ $\exists$ konvergente Teilfolge $(f_{n(k(\ell))}(x_2))_\ell$

setze $y_2 := \lim\limits_{\ell\to\infty} f_{n(k(\ell))}(x_2)$

beachte: es gilt auch

$\lim\limits_{\ell\to\infty} f_{n(k(\ell))}(x_1) = y_1$

Bezeichne nun

$f_\nu^{(1)} = f_{n(\nu)}$

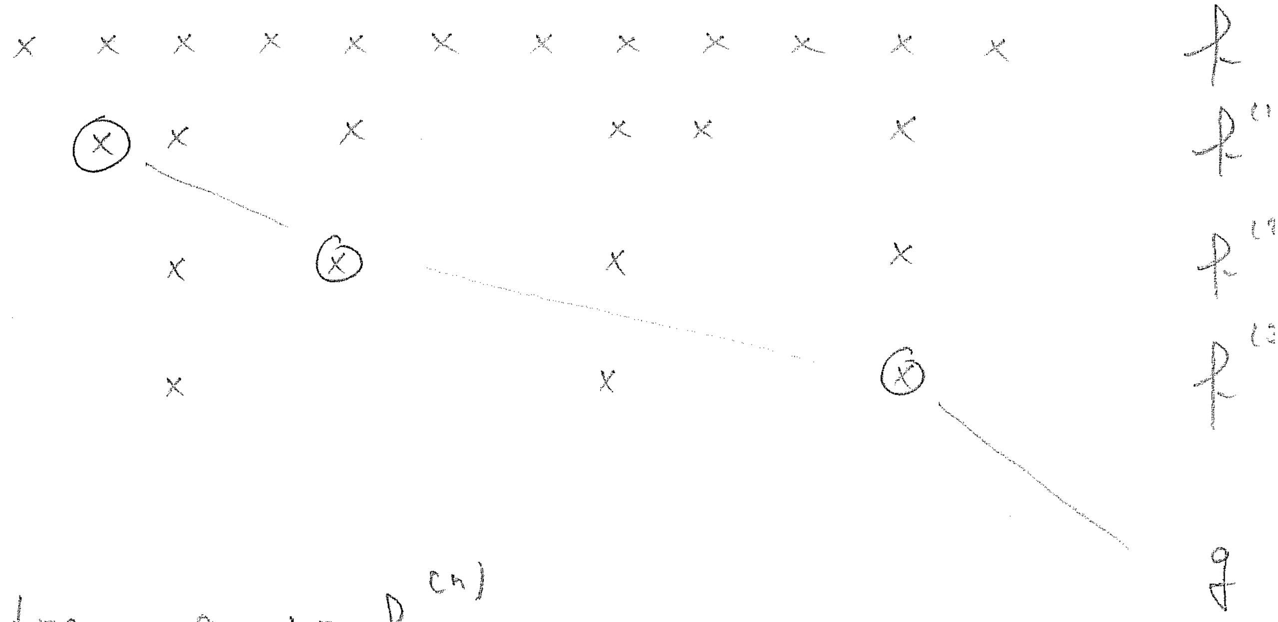
$f_\nu^{(2)} = f_{n(k(\nu))}$

und iteriere; das ergibt

Teilfolgen $(f_n^{(1)}), (f_n^{(2)}), \ldots$ von $(f_n)$ mit

- $(f_n^{(k+1)})_n$ ist Teilfolge von $(f_n^{(k)})$

- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2, \ldots, k$




Setze $g_n := f_n^{(n)}$

Dann ist, für jedes $k$, $(g_n)_n$ – abgesehen von endlich vielen Anfangsgliedern – eine Teilfolge von $(f_n^{(k)})_n$, d.h.

$\lim_{n \to \infty} g_n(x_k)$ existiert $\forall k$

(und ist gleich $g_k$)

$(g_n)_n$ ist unser Kandidat für eine konvergente Teilfolge. Wir wissen

- $(g_n)_n$ ist Teilfolge von $(f_n)$
- $g_n(x)$ konvergiert für alle $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$

Wir müssen zeigen:

- $g_n(x)$ konvergiert $\forall x \in [0,1]$
- $g_n$ konvergiert glm

Betrachte $x \in [0,1]$ ; wir zeigen:

$(g_n(x))$ ist Cauchyfolge

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \underbrace{|g_n(x) - g_n(x_i)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|g_n(x_i) - g_m(x_i)|} + \underbrace{|g_m(x_i) - g_m(x)|}_{< \varepsilon}$$

| | | |
|---|---|---|
| $< \varepsilon$ | fixiere $x_i$ | $< \varepsilon$ |
| falls $\|x - x_i\| < \delta$ | mit $\|x - x_i\| < \delta$ | |
| | dann $\|..\| < \varepsilon$ | |
| $\delta$ unabh. von $n$, | für $n, m \geq N$ | |
| da $(g_n)$ gleichgradig | da $(g_n(x_i))_n$ | |
| stetig | konvergiert | |

$\Rightarrow (g_n(x))_n$ konvergiert

Um gleichmässige Konvergenz zu erhalten, muss obige Abschätzung unabhängig von $x$ sein.

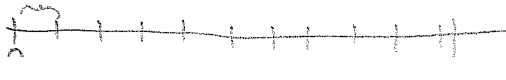
Dies gilt im Augenblick nicht, da Wahl von $N$ von dem betrachteten $x_i$ abhängt.

aber: falls wir nur endlich viele $x_i$ $(i \in I, |I| < \infty)$ benutzen müssen dann haben wir nur endliche viele $N_i$ und wir können dann $N$ als Maximum davon nehmen.

d.h. wir brauchen endlich viele $x_i \in \mathbb{Q}$, so dass für jedes $x \in [0,1]$ mindestens ein $x_i$ $(i \in I)$ existiert mit $|x - x_i| < \delta$ (für festes $\delta$)

$\rightarrow$ wähle $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < \delta$ und als $x_i$:

$r, 2r, 3r, \ldots, \lceil \frac{1}{r} \rceil \cdot r$



Dann haben wir die glm Abschätzung:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$:

$$|g_n(x) - g_m(x)| < 3\varepsilon \qquad \forall x \in [0,1] \quad \forall n,m \geq N$$

$\Rightarrow (g_n)_n$ konvergiert glm. $\square$

<u>5.9. Beispiel:</u> Betrachte $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C[0,1]$ mit $\|f_n\| \leq 1$ und so dass alle $f_n'$ existieren und $\|f_n'\| \leq c$

(Beschränkung der Ableitung schließt Beispiele wie in 4.24 aus)

Dann ist $\{f_n\}_n$ gleichgradig stetig, da

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n'(\xi)(x-y)| \quad \text{Mittelwertsatz}$$

$$\leq c\,|x-y|$$

$\Rightarrow \overline{\{f_n\}_n}$ ist gleichgradig stetig, abgeschlossen und beschränkt

$\overset{\text{Arz.-As}}{\Longrightarrow} \overline{\{f_n\}_n}$ ist kompakt

$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat glm. konvergente Teilfolge