6. Parametrisierte Kurven im $\mathbb{R}^n$

6.1. Definition: Eine (parametrisierte) stetige Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

(wobei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt)

6.2. Bemerkung: 1) Sei γ parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^n$.

Dann ist

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

wobei $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n$

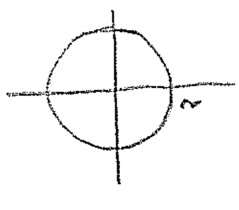
Es gilt

$$\left.\begin{array}{l} \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ \text{stetig} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R} \\ \text{stetig} \end{array}\right. \quad \forall i$$

2) (*)

6.3. Beispiele: $n = 2$

$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ für festes $r > 0$

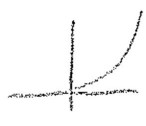


Kreis mit Radius r

$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ für $a, b > 0$

Ellipse mit Halbachsen a und b

$\gamma(t) = (t, t^2)$



Parabel

⊛ 2) parametrisierte Kurve

≙ Kurve als geometrisches Objekt

\+ Parametrisierung

(d.h. wie wir die Kurve durchlaufen)

<u>6.4 Definition</u>: Eine Abbildung

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

heißt <u>differenzierbar</u> im Punkt $t_0 \in [a,b]$, mit Ableitung $\dot{\gamma}(t_0)$, falls für jede Folge $t_k \to t_0$ in $[a,b]$, $t_k \neq t_0$

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{k \to \infty} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_0)}{t_k - t_0}$$

γ heißt diffbar auf $[a,b]$, wenn es in jedem Pkt $t_0 \in [a,b]$ diffbar ist.

⊛
<u>6.5 Bemerkung</u>: 1) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ ist diffbar in t_0 gdw $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ diffbar in t_0.

Dann gilt:

$$\dot{\gamma}(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_n'(t_0))$$

2) Jede diffbare Abb. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

⊛ $\dot{\gamma}(t_0)$ heißt <u>Tangential</u>- oder <u>Geschwindigkeitsvektor</u> zu γ im Pkt $\gamma(t_0)$

<u>Ziel</u>: Bestimme Länge von γ durch lineare Approximation

6.6. Notation: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetige Kurve.

Sei $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b\}$
eine Unterteilung von $[a,b]$

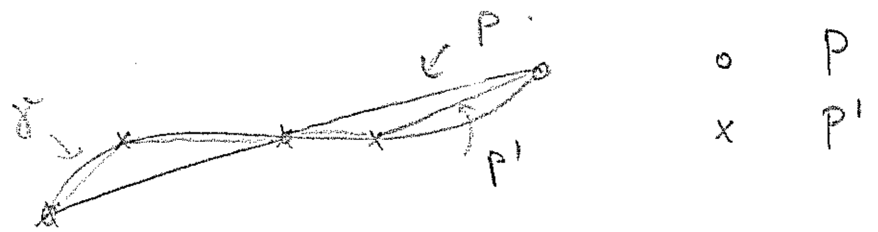
Wir setzen

$$L(P) := \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

(Länge des "Sehnenpolygons" zu P)

beachte: Ist P' feiner als P (d.h. $P' \supset P$),
so gilt (nach Dreiecksungleichung):

$$L(P') \geq L(P)$$



6.7. Definition: Die stetige Kurve γ heißt
<u>rektifizierbar</u>, falls

$$L(\gamma) := \sup \{ L(P) \mid P \text{ Unterteilung von } [a,b] \}$$

existiert.

$L(\gamma)$ heißt dann <u>Länge</u> von γ.

6.8. Bemerkung: Nicht jede stetige Kurve
ist rektifizierbar. Es gibt z.B. stetige
Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$
("Peano Kurve"). Diese hat $L(\gamma) = \infty$

6.9 Satz: Jede stetig diffbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

(d. h. $t \mapsto \dot\gamma(t)$ stetig)

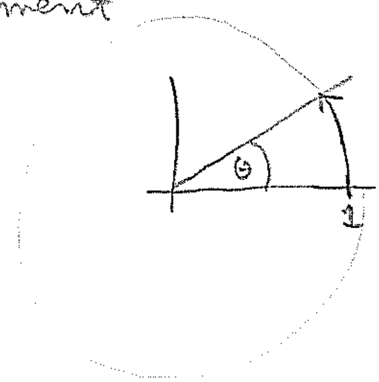
ist rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

("zurückgelegter Weg = Integral über Geschwindigkeit")

6.10. Beispiel: Kreissegment

$\gamma : [0, \Theta] \to \mathbb{R}^2$



$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$\Rightarrow \dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\Rightarrow \|\dot\gamma(t)\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

d.h. $\|\dot\gamma(t)\| = 1 \quad \forall t$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^\Theta \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^\Theta 1\,dt = \Theta$$

Beweis von 6.9: Wir beweisen:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass für jede Unterteilung P von $[a,b]$ mit Feinheit $\leq \delta$ (d.h. $|t_i - t_{i-1}| < \delta \ \forall i = 1,..,k$) gilt:

$$(*) \quad \left| \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt - L(P) \right| < \varepsilon$$

Aus $(*)$ folgt dann

(1) $L(P) \le \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt \quad \forall P$

denn: für $\varepsilon > 0$ wähle $P \subset P'$ mit

Feinheit $(P') \le \delta$

$\Rightarrow L(P) \le L(P') \le \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt + \varepsilon$

gilt $\forall\ \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ Beh.

(2) $\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt$ kann beliebig genau durch Zahlen der Form $L(P)$ approximiert werden

(1), (2) $\Rightarrow \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \sup\{L(P)\}$

Um (*) zu zeigen benutzen wir folgenden

<u>6.11. Hilfssatz:</u> $\forall\ \alpha > 0\ \exists\ \delta > 0$ so dass

(a) $\|\dot\gamma(\theta) - \dot\gamma(\theta')\| < \alpha$ für $\theta, \theta' \in [a,b]$, $|\theta - \theta'| < \delta$

(b) $\|\dot\gamma(\theta) - \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\| < \alpha$ für $a \le s \le \theta \le t \le b$ mit $|s-t| < \delta$

(c) $\left|\|\dot\gamma(\theta)\| - \|\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\|\right| < \alpha$ — " —

<u>Beweis:</u> (a) $\dot\gamma$ stetig, $[a,b]$ kompakt

$\Rightarrow \dot\gamma$ glm stetig, d.h. (a)

(b) $\gamma(\theta) = (\gamma_1(\theta), \dots, \gamma_n(\theta))$

$\Rightarrow \|\dot\gamma(\theta) - \frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s}\|^2 = \sum_{k=1}^n |\gamma_k'(\theta) - \frac{\gamma_k(t)-\gamma(s)}{t-s}|^2$

Wähle δ gemäß (a) so dass

$$\|\dot{\gamma}(\Theta) - \dot{\gamma}(\Theta')\| < \sqrt{\tfrac{\alpha^2}{n}} \qquad \text{falls } |\Theta - \Theta'| < \delta$$

$$\Rightarrow |\gamma_k'(\Theta) - \gamma'(\Theta')| < \sqrt{\tfrac{\alpha^2}{n}} \qquad \text{— " —}$$

für $k = 1, .., n$

Nun gilt, für jedes $k = 1, .., n$, nach Mittelwertsatz

$$\frac{\gamma_k(t) - \gamma(s)}{t-s} = \gamma_k'(\Theta_k) \quad \text{für } \Theta_k \text{ mit}$$

$s \leq \Theta_k \leq t$

Da $s \leq \Theta \leq t$, und $|s-t| < \delta$

folgt also $|\Theta - \Theta_k| < \delta$

und damit nach Wahl von δ:

$$\left|\gamma_k'(\Theta) - \frac{\gamma_k(t) - \gamma(s)}{t-s}\right| = |\gamma_k'(\Theta) - \gamma_k'(\Theta_k)|$$

$$< \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \left\|\dot{\gamma}(\Theta) - \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t-s}\right\|^2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^2}{n} = \alpha^2$$

$\Rightarrow$ (b)

(c) Benutze inverse Dreiecksungleichung

$$\|x - y\| \geq |\,\|x\| - \|y\|\,|$$

$\square$

<u>Beweis von (*)</u>: Sei $\varepsilon > 0$

Es gilt:

$$L(P) = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\frac{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}}}_{\approx \|\dot\gamma(\Theta_i)\| \text{ nach 6.11 (c)}} \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Wähle beliebige $\Theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$; dann

$$\left| \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt - L(P) \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt - \sum_{i=1}^{k} \|\dot\gamma(\Theta_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \right|$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\|\dot\gamma(\Theta_i)\| - \frac{\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}{t_i - t_{i-1}} \right)}_{< \alpha \text{ nach 6.11 (c)}} (t_i - t_{i-1}) \right|$$

$$< \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\big| \|\dot\gamma(t)\| - \|\dot\gamma(\Theta_i)\| \big|}_{< \alpha \text{ nach 6.10 (a)}} dt + \alpha \cdot (b-a)$$

$$< 2(b-a)\alpha \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

Wähle $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ und δ zu diesem α gemäß 6.11

$\square$

6.12. Bemerkungen: 1) Sei

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

eine stetige Kurve und

$\sigma : [a', b'] \to [a,b]$

stetig, monoton, bijektiv und

$\sigma(a') = a \;,\; \sigma(b') = b$

Setze $\tilde{\gamma} : [a', b'] \to \mathbb{R}^n$

$s \mapsto \tilde{\gamma}(s) := \gamma(\sigma(s))$

Dann ist $\tilde{\gamma}$ eine Umparametrisierung von γ und es gilt $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$

(da die Sehnenpolygone von $\tilde{\gamma}$ dieselben sind wie die von γ)

2) Eine stetig diffbare Kurve heißt regulär, falls $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0 \quad \forall t$

Falls γ regulär, so ist

$t \mapsto s(t) := \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\|\, du$

$s : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$

stetig diffbar mit $s'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$,

d.h. s ist monoton und bijektiv

$\Rightarrow \exists$ diffbare Umkehrabbildung $\varphi : [0, L(\gamma)] \to [a,b$

und für

$$\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$$
$$s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$$

gilt

$$\dot{\tilde{\gamma}}(s) = \dot{\gamma}(\varphi(s)) \cdot \underbrace{\varphi'(s)}_{\frac{1}{s'(\varphi(s))}}$$

$$= \dot{\gamma}(\varphi(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{\gamma}(\varphi(s))\|}$$

d.h. $\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| = 1 \quad \forall s$

$s \mapsto \tilde{\gamma}(s)$ ist die natürliche Parametrisierung für γ.