7. Differenzierbare Funktionen in mehreren Variablen

7.1. Bemerkung: 1) Wir betrachten, für festes $n, m \in \mathbb{N}$, Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Diese ist stetig, falls

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 :$$

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

oder äquivalent:

$$x_k \to x \text{ in } \mathbb{R}^n \implies f(x_k) \to f(x) \text{ in } \mathbb{R}^m$$

(vgl. 3.12)

2) Falls wir f koordinatenweise schreiben

$$f = (f_1, \dots, f_m) \quad \text{mit}$$

$$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (i = 1, \dots, m)$$

so gilt klarerweise

$$f \text{ stetig} \iff f_i \text{ stetig } \forall i = 1, \dots, m$$

(vgl. entsprechende Bemerkung 6.2. für Kurven)

3) Beachte aber: entsprechende Aussage für "Stetigkeit in jeder Variablen" stimmt nicht!

7.2. Beispiel: Betrachte

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dann ist, für jedes feste $x_0 \in \mathbb{R}$ (auch für $x_0 = 0$), die Fkt

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y \mapsto g(y) = f(x_0, y) = \frac{2x_0 y}{x_0^2 + y^2}$$

stetig

Das gleiche gilt für jedes feste $y_0 \in \mathbb{R}$

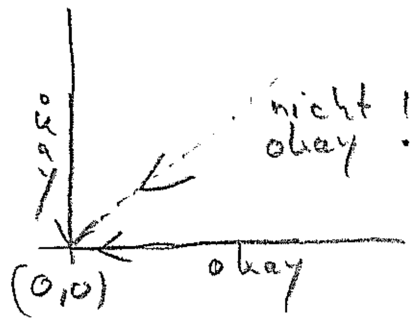
für $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto h(x) = f(x, y_0) = \frac{2x y_0}{x^2 + y_0^2}$$

aber: f ist nicht stetig bei $(0,0)$

denn betrachte: $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} (0,0)$

aber: $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1 \not\to 0 = f(0,0)$



<u>7.3. Motivation:</u> Was ist die Ableitung einer Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Welche Art von Objekt?

Betrachte bekannten Spezialfall $n = m = 1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oder äquivalent

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + r(h)$$

wobei der "Restterm" $r(h)$ klein ist in dem Sinne

$$\lim \frac{r(h)}{h} = 0$$

anders ausgedrückt: wir approximieren $f(x+h) - f(x)$ durch eine lineare Fkt

$$h \mapsto f'(x) \cdot h$$
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Im allgemeinen Fall

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

wollen wir ebenso

$$f(x+h) - f(x) = A(h) + \underbrace{r(h)}_{\substack{\text{"klein"} \\ \text{für } h \to 0}}$$

durch eine lineare Fkt

$$h \mapsto A(h)$$
$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

approximieren.

Wir werden dann $f'(x) = A$ setzen (und f' mit Df bezeichnen)

7.4. Definition: Eine lineare Abbildung (Operator)

$A : X \to Y$

zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen X, Y ist eine Abbildung mit

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \qquad \forall x, y \in X$$
$$A(\alpha x) = \alpha A(x) \qquad \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$$

7.5. Bemerkungen: 1) Oft schreibt man Ax für $A(x)$, falls A linear

2) Lineare Operatoren auf endlich-dimensionale Vektorräumen (wie z.B. $\mathbb{R}^n$) sind Gegenstan der Linearen Algebra

3) Lineare Operatoren auf unendlich-dim. Vektorräumen (wie z.B. $C[0,1]$) sind Gegenstand der Funktionalanalysis

4) Beachte: A linear $\Rightarrow A(0) = 0$

5) Sei $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$

$e_1, \dots, e_n$ Basis von $\mathbb{R}^n$

$f_1, \dots, f_m$ Basis von $\mathbb{R}^m$

Dann ist

$$A e_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und A kann mit $m \times n$ - Matrix

$$(a_{ji})_{\substack{j=1,..,m \\ i=1,..,n}}$$

identifiziert werden. Dann

$A x \mathrel{\hat{=}}$ Matrix $\times$ Spalten - Multiplikation

<u>7.6 Bezeichnungen:</u> Mit $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Für $A_1, A_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ definieren wir $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ durch: $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)(x) = \alpha_1 A_1(x) + \alpha_2 A_2(x)$$

Für $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ definieren wir $BA \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ durch:

$$(BA)(x) = B(A(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

7.7. Bemerkungen: 1) Unter der Identifizierung mit Matrizen (für feste Wahl der Basen) entspricht dies Addition und Multiplikation von Matrizen.

2) $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wird so ein (endlich-dimensionaler) Vektorraum.

Man kann auch Norm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ einführen durch

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad (*)$$

Damit wird $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zu einem Banachraum.

3) Man zeigt leicht:

$$\|A\| < \infty \qquad \forall\ L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Beachte: Aus (*) folgt

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

somit aber: Falls $x_k \xrightarrow{k \to \infty} x$

$$\Rightarrow \|Ax_k - Ax\| = \|A(x_k - x)\| \leq \|A\| \underbrace{\|x_k - x\|}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow Ax_k \to Ax$$

d.h.: jede lin. Abb. $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist

$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist sogar glm stetig:

Für $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ (betrachte $A \neq 0$)

Dann gilt für $\|x-y\| < \delta$:

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\| \underbrace{\|x-y\|}_{< \frac{\varepsilon}{\|A\|}} < \varepsilon$$

4) Man kann obiges auch auf linea Abb. $A: X \to Y$ zwischen beliebigen Vektorräumen verallgemeinern. Allerdings gilt dann $\|A\| < \infty$ nicht mehr unbedingt für alle $A \in L(X, Y)$; d.h.: lineare Abb. zwischen unendlich-dim. Vektorräumen sind <u>nicht</u> automatisch stetig.

<u>7.8 Definition</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ Abbildung.

f heißt im Pkt $x \in U$ <u>differenzierbar</u> (oder auch: total differenzierbar), falls es eine lineare Abb.

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

gibt und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$f(x + \xi) = f(x) + L(\xi) + \varphi(\xi)$

für $\|\xi\| < \varepsilon$, und wobei

$\varphi : B(0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$

eine Fkt ist mit

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \qquad (*)$$

Wir bezeichnen L mit $Df(a)$ und nennen es die (totale) Ableitung von f im Pkt x.

7.9. Bemerkungen: 1) Falls f in x diffbar, so ist f in x stetig.

denn: $\underbrace{f(x+\xi)}_{} = f(x) + L(\xi) + \varphi(\xi)$

$L(\xi)$: stetig, als lineare Abb. und $L(0)=0$

$\varphi(\xi)$: $\varphi(\xi_n) \to 0$ für $\xi_n \to 0$, $\xi_n \neq 0$ nach $(*)$

2) Sei $f = A$ linear; dann

$$A(x+\xi) = Ax + \underbrace{A\xi}_{L(\xi)} + \underbrace{0}_{\varphi(\xi)}$$

d.h. A ist überall diffbar und

$DA(x) = A \qquad \forall x$

3) Beachte auch: lineare Abb. L in Z.P. ist eindeutig bestimmt (falls sie existiert), d.h. $Df(x)$ ist wohldef.

4) Falls f in x diffbar, so ist f in alle Richtungen "partiell diffbar", d.h., für $\xi \in \mathbb{R}^n$ fest, und

$$\gamma_\xi(t) = x + t\xi \qquad (t \in \mathbb{R},\ |t| \text{ hinr. klein})$$

ist $f \circ \gamma_\xi(t)$ $\overset{\text{in } t=0}{\text{diffbar}}$; denn (mit $\gamma := \gamma_\xi$)

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma(0)) + \underbrace{L(\underbrace{\gamma(t) - \gamma(0)}_{t\xi})}_{t\,L(\xi)} + \varphi(\gamma(t) - \gamma(0))$$

$$\Rightarrow \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = L(\xi) + \underbrace{\frac{\varphi(t\xi)}{t}}_{\to 0 \text{ für } t \to 0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(x + t\xi)\Big|_{t=0} = L\xi \qquad \text{wobei } L = Df(x)$$

7.10. Definition: Seien f und U wie in 7.8.

Wir schreiben $D_\xi f(x)$ für die Ableitung der Kurve $\gamma(t) = f(x+\xi t)$ in $t=0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_i f = D_{e_i} f$ für die Ableitung in Richtung $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Stelle

7.11. Bemerkung: 1) Bzgl der Standardbasis $(e_i)_{i=1}^n$ bzw $(e_i)_{i=1}^m$ von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ist $Df(x)$ also als Matrix der partiellen Ableitungen

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

gegeben, wobei $f = (f_1, \dots, f_m)$ mit $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (xy, x+y)$$

d.h. $f = (f_1, f_2)$ mit

$$f_1(x,y) = xy$$
$$f_2(x,y) = x+y$$

$$\Rightarrow Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{} & \frac{\partial f_2}{} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Beachte: Existenz der totalen Ableitung ist stärker als Existenz aller partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

<u>Beispiel</u>: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(vgl. 7.2.)

Dann existieren $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ überall (auch bei $(0,0)$);

aber da f bei $(0,0)$ nicht stetig ist, kann es dort auch nicht diffbar sein!

<u>7.12 Satz:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f : U \to \mathbb{R} \qquad (\text{d.h. } m = 1\,!)$$

eine Fkt, für die die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ in U existieren und stetig sind. Dann ist f in U diffbar.

<u>Beweis:</u> Sei $x \in U$ und wähle $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset U$. Wir wollen zeigen:

$$f(x+\xi) = f(x) + L\xi + \varphi(\xi)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$$

(mit $(e_i)_{i=1}^n$ Standardbasis von $\mathbb{R}^n$)

also

$$f(x+\xi) = f(x + \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n)$$

$$= f(x + \xi_1 e_1 + \dots + \xi_{n-1} e_{n-1}) + \xi_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(y^{(n)})$$

Mittelwertsatz

für ein $y^{(n)} = x + \dots + \xi_{n-1} e_{n-1} + \Theta_n \xi_n e_n$

wobei $0 \leq \Theta_n \leq 1$

$$\vdots$$

$$= f(x) + \xi_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(y^{(1)}) + \dots + \xi_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(y^{(n)})$$

wobei $y^{(i)} = x + \dots + \xi_{i-1} e_{i-1} + \Theta_i \xi_i e_i$

und $0 \leq \Theta_i \leq 1$

$$= f(x) + A\xi + \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \xi_i}_{=: \varphi(\xi)}$$

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)_{i=1}^n$$

für $\xi \to 0$ gilt: $y^{(i)} \to x \quad \forall i$,

also: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y^{(i)}) \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \forall i$

$$\Rightarrow \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y^{(i)}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{|\xi_i|}{\|\xi\|}}_{\leq 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \to 0 \quad \text{für } \xi \to 0,\ \xi \neq 0 \qquad \square$$

<u>7.13. Korollar:</u> Sei $f: U \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar. Dann ist f stetig.

<u>Beweis:</u> stetig partiell diffbar

$\Rightarrow$ diffbar

$\Rightarrow$ stetig $\square$

<u>7.14. Bezeichnung:</u> $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ heißt <u>k-mal stetig partiell diffbar</u>, falls alle partiellen Ableitungen der Form

$D_{i_1} \dots D_{i_k} f$

existieren und stetig sind.

<u>7.15. Satz:</u> Sei $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. Dann ist

$$D_i D_j f = D_j D_i f \qquad \forall i,j = 1,\dots,n$$

7.16. Beispiel: $f(x,y) = x e^{xy}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xy\, e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = x e^{xy} + x e^{xy} + xyx\, e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = 2x\, e^{xy} + x^2 y\, e^{xy}$$

also $$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f$$

Beweis von 7.15:

$$\begin{tikzcd}
x+se_j \arrow[r] & x+se_j+te_i \\
x \arrow[u] \arrow[r] & x+te_i \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Betrachte

$$(*) = [f(x+te_i+se_j) - f(x+te_i)] - [f(x+se_j) - f(x)]$$

Setze $g(t) := f(x+te_i+se_j) - f(x+te_i)$

$$\Rightarrow \quad (*) = g(t) - g(0)$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} t \cdot g'(\Theta) \qquad \text{für } 0 < \Theta < t$$

$$g'(\Theta) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \Theta e_i + s e_j)}_{=:\, h(s)} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \Theta e_i)$$

$$= h(s) - h(0)$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} s\, h'(\tilde{\Theta}) \qquad \text{für} \quad 0 < \tilde{\Theta} < s$$

$$h'(\tilde{\Theta}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + \Theta e_i + \tilde{\Theta} e_j)$$

also: $(*) = s \cdot t \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + \Theta e_i + \tilde{\Theta} e_j)$

analoge Rechnung mit Rollen von s, t vertauscht

$$\Rightarrow (*) = s \cdot t \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x + \eta e_j + \tilde{\eta} e_i)$$

für $0 < \eta < s$
$0 < \tilde{\eta} < t$

also: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + \Theta e_i + \tilde{\Theta} e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \eta e_j + \tilde{\eta} e$

$s, t \to 0 \Rightarrow \Theta, \tilde{\Theta} \to 0 \Rightarrow x + \Theta e_i + \tilde{\Theta} e_j \to x$
$\eta, \tilde{\eta} \to 0 \qquad x + \eta e_j + \tilde{\eta} e_i \to x$

$$\overset{\text{Stetigkeit}}{\Longrightarrow} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

<u>7.17. Bemerkung:</u> Beachte: Eine Fkt

$$\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

ist stetig bzw. diffbar genau dann, wenn alle Komponentenfkten $f_i : U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, .., m)$ (d.h. $f = (f_1, .., f_m)$) stetig bzw. diffbar sind.

Daher gelten die Aussagen von 7.12, 7.13 und 7.15 auch für Fkten mit Werten in $\mathbb{R}^m$.

<u>7.18. Bezeichnung:</u> 1) Falls $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ diffbar ist, so bezeichnen wir

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i = 1, .., m \\ j = 1, ..., n}}$$

als <u>Funktional-</u>, <u>Jacobi-</u> oder <u>Differentialmatrix</u>.

2) Im Fall $m = 1$, d.h. $f : U \to \mathbb{R}$, ist die Ableitung $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{j=1,..,n}$ eine $1 \times n$ - Matrix und wird mit <u>grad f</u> bezeichnet

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

7.19. Bemerkung: 1) Für $f : U \to \mathbb{R}$

definiert grad f ein Vektorfeld, d.h.

grad f ist vektorwertige Fkt

2) Für Richtungsableitungen gilt in dem Fall:

$$D_\xi f = Df \cdot \xi$$

$$= \underset{1 \times n}{\text{grad } f} \cdot \underset{n \times 1}{\xi}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\text{grad } f)_i \cdot \xi_i$$

$$= \langle \text{grad } f , \xi \rangle$$

Insbesondere gilt dann (nach Cauchy-Schwarz

$$\| D_\xi f \| = | \langle \text{grad } f , \xi \rangle |$$

$$\leq \| \text{grad } f \| \cdot \| \xi \|$$

und "=" (d.h. maximale Ableitung bei fester Länge von ξ)

genau dann, wenn ξ in Richtung von grad f zeigt.

<u>7.20. Satz (Kettenregel)</u>: Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^k \\ \cap & & \cap & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

Sei g diffbar in $x \in U$ und f diffbar in $g(x) \in V$. Dann ist $f \circ g : U \to \mathbb{R}^k$ diffbar in x und es gilt

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

Komposition von linearen Abb.
$\hat{=}$ Matrizenmultiplikation

<u>Beweis</u>: Da g in x diffbar, gilt:

$$g(x+\xi) = g(x) + Dg(x) \cdot \xi + \varphi(\xi)$$

Da f in $g(x)$ diffbar, gilt:

$$\begin{aligned} f \circ g(x+\xi) &= f(g(x+\xi)) \\ &= f(g(x) + Dg(x) \cdot \xi + \varphi(\xi)) \\ &= f(g(x)) + Df(g(x)) \cdot (Dg(x) \cdot \xi + \varphi(\xi)) \\ &\quad + \psi(Dg(x) \cdot \xi + \varphi(\xi)) \end{aligned}$$

$$= f(g(x)) + Df(g(x)) \cdot Dg(x) \cdot \xi + Df(g(x)) \cdot \varphi(\xi)$$
$$+ \psi\big(Dg(x)\cdot \xi + \varphi(\xi)\big)$$

Restterme sind "klein", da:

$$\frac{Df(g(x)) \cdot \varphi(\xi)}{\|\xi\|} = Df(g(x)) \underbrace{\left(\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|}\right)}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } \xi \to 0}} \longrightarrow 0$$

$$\frac{\psi(Dg(x)\,\xi + \varphi(\xi))}{\|\xi\|} = \underbrace{\frac{\psi(\ldots)}{\|Dg(x)\xi + \varphi(\xi)\|}}_{\substack{\to 0,\text{ da} \\ Dg(x)\cdot\xi + \varphi(\xi) \to 0}} \cdot \underbrace{\frac{\|Dg(x)\,\xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{?}$$

? $\quad \|Dg(x)\cdot\xi + \varphi(\xi)\| \leq \underbrace{\|Dg(x)\cdot\xi\|} + \|\varphi(\xi)\|$

$$\leq \|Dg(x)\| \cdot \|\xi\| \quad \text{(vgl. 7.7}$$

$$\Rightarrow \frac{\|Dg(x)\cdot\xi + \varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{\|Dg(x)\|} + \underbrace{\frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|}}_{\to 0}$$

$\Rightarrow$? ist beschränkt, also

$$\frac{\psi(Dg(x)\,\xi + \varphi(\xi))}{\|\xi\|} \longrightarrow 0 \quad \text{für } \xi \to 0$$

also: $f \circ g$ diffbar an x und

$$Df \circ g(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \qquad \square$$

<u>7.21. Beispiel</u>: 1) $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

wobei φ, f diffbar

Dann

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad 1 \times n\text{-Matrix}$$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \end{pmatrix} \quad n \times 1\text{-Matrix}$$

also:

$$(f \circ \varphi)'(t) = Df(\varphi(t)) \cdot D\varphi(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t)$$

andere Schreibweise: $f(x_1, \dots, x_n)$, $x_i = x_i(t)$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

2) $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\varphi(t) = (\sin t, \cos t)$

[d.h. $f \circ \varphi(t) = f(\sin t, \cos t)$

$= \sin^2 t + \cos^2 t = 1$]

dann

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \underset{\overset{\uparrow}{\sin t}}{2x} \cdot \cos t + \underset{\overset{\uparrow}{\cos t}}{2y} \cdot (-\sin t)$$

$$= 0$$