8. Taylorformel und lokale Extrema

8.1 Erinnerung: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig diffbar. Dann gilt die Taylorformel

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\cdot t + \frac{1}{2} f''(x)\cdot t^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, t^n + R_{n+1}(t)$$

wobei das Restglied R_{n+1} von der Form ist:

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n f^{(n+1)}(x+s)\, ds$$

~~oder~~ alternativ:

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta)\cdot t^{n+1}$$

für ein Θ mit $x \leq \Theta \leq x+t$

8.2. Bezeichnung: Für ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ("Multiindex") setzen wir

$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$

und für $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$

Falls $\mathbb{R}^n \supset \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $|\alpha|$-mal stetig differenzierbar ist, so setzen wir

$$D^\alpha f(x) := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n} f(x)$$

8.3. Satz: Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar.
Sei $x \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke $x + t\xi$ für $t \in [0,1]$ ganz in $\mathcal{U}$ liegt.
Dann ist die Fkt

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto g(t) := f(x + t\xi)$$

k-mal stetig differenzierbar und es gilt

$$g^{(k)}(t) = \frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + t\xi)\, \xi^\alpha$$

Beweis: Für $k = 1$ gilt:

$$g(t) = f(\varphi(t)) \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = x + t\xi$$

also nach Kettenregel

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t)}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n D_i f(x + t\xi) \cdot \xi_i$$

$$\Rightarrow g''(t) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{d}{dt}\left(D_i f(x + t\xi)\right)}_{\sum_{j=1}^n D_j D_i f(x+t\xi) \cdot \xi_j} \cdot \xi_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} D_j D_i f(x+t\xi) \cdot \xi_j \cdot \xi_i$$

Iteriere

$$\Rightarrow \quad g^{(k)}(t) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n} D_{i_1} \cdots D_{i_k} f(x+t\xi) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}$$

beachte: nach 7.15, vertauschen die partiellen Ableitungen, d.h. jeder Term

$$D_{i_1} \cdots D_{i_k} f$$

ist von der Form

$$D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f$$

für ein $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$

Es gibt $\frac{k!}{\alpha!}$ Tupel $(i_1, \dots, i_k)$, die zu gleichem α führen, d.h.

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha| = k} D^\alpha f(x+t\xi) \cdot \xi^\alpha \cdot \frac{k!}{\alpha!}$$

[z.B. $\sum_{i,j} D_i D_j f \cdot \xi_i \xi_j = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} \frac{2!}{\alpha_1! \alpha_2!} D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} f \cdot \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2}$

$n = 2$

$$= D_1^2 f \cdot \xi_1^2 + D_2^2 f \cdot \xi_2^2 + 2 D_1 D_2 f \cdot \xi_1 \cdot \xi_2$$]

□

8.4. Satz (Taylorformel): Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, (8-

$x \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ so dass $x + t\xi \in \mathcal{U}$ $\forall t \in [0,1]$

Weiter sei $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig partiell diffbar.

Dann existiert ein $\Theta \in [0,1]$, so dass

$$f(x+\xi) = f(x) + \sum_{1 \le |\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(x+\Theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha$$

Beweis: Sei $g(t) = f(x+t\xi)$, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ g $(k+1)$-mal stetig diffbar

Taylorformel (vgl. 8.1) $\Rightarrow$ $\exists \Theta \in [0,1]$:

$$g(1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(k+1)}(\Theta)}{(k+1)!}$$

$$\parallel$$

$$f(x+\xi)$$

$\overset{8.3.}{\Longrightarrow}$ Beh.

$\square$

8.5. Definition: Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$

f hat in $x_0 \in \mathcal{U}$ ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum), falls $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ so dass: $f(y) \le f(x_0)$ $\forall y \in B(x_0, \varepsilon)$

(bzw. $\ge$)

f hat in x_0 ein isoliertes Maximum (bzw. Min)

falls $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $B(x_0, \varepsilon) \subset U$

so dass $f(y) < f(x_0)$ $\quad \forall\, y \in B(x_0, \varepsilon),\ y \neq x$

(bzw. ">")

<u>8.6. Satz:</u> Sei $f : U \to \mathbb{R}$ diffbar,

$x_0 \in U$ lokales Extremum von f

Dann gilt: $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$

(d.h. : alle Richtungsableitungen

$D_\xi f(x_0) = 0$)

<u>Beweis:</u> Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ s.d. $x_0 + t\xi \in U$ $\forall\, |t| <$

Dann ist $D_\xi f(x_0)$ Ableitung $g'(0)$ von

$$g(t) = f(x_0 + t\xi) \quad (-\varepsilon < t < \varepsilon)$$

$t = 0$ ist Max bzw. Min für $g(t)$

$\overset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow} g'(0) = 0$ $\square$

<u>8.7. Bem:</u> Für $n = 1$, $f'(x_0) = 0$ entscheidet $f''(x_0)$ darüber, ob Max ($f''(x_0) < 0$) oder Min ($f''(x_0) > 0$) vorliegt.

Was ist Entsprechung davon für beliebiges n?

$$f(x+\xi) = f(\xi) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \xi_i}_{\langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha}_{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j f \cdot \xi_i \xi_j} + \dots$$

$= f(\xi) + \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle A\xi, \xi \rangle + \ldots$ (8-

wobei

$$A = (D_i D_j f(x_0))_{i,j=1}^{n}$$

<u>8.8 Def.:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell diffbar.

Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$(\operatorname{Hess} f)(x) := (D_i D_j f(x))_{i,j=1,\ldots,n}$$

die <u>Hesse-Matrix</u> von f im Pkt $x \in U$

(*)

<u>8.10 Bemerkung:</u> Da $D_i D_j f = D_j D_i f$ ist

Hess f eine symmetrische Matrix, kann also

diagonalisiert werden und hat n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

(mit Multiplizität gezählt)

Es gilt:

$\langle (\operatorname{Hess} f)\xi, \xi \rangle > 0 \quad \forall \xi \neq 0$ "positiv definit" $\iff$ alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$

$\langle (\operatorname{Hess} f)\xi, \xi \rangle < 0 \quad \forall \xi \neq 0$ "negativ definit" $\iff$ alle Eigenwerte $\lambda_i < 0$

$\exists\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \operatorname{Hess} f\, \xi, \xi \rangle > 0$, $\langle \operatorname{Hess} f\, \eta, \eta \rangle < 0$ "indefinit" $\iff$ $\exists$ Eigenwerte λ_i, λ_j mit $\lambda_i > 0$, $\lambda_j < 0$

(*) 8.9. Satz: Bei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell diffbar.

Dann gilt für $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\|$ hinr. klein

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle (\operatorname{Hess} f)(x)\,\xi, \xi \rangle + \varphi(\xi)$$

wobei für die Fkt φ gilt:

$$\lim_{\substack{\xi \to 0 \\ \xi \neq 0}} \frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|^2} = 0$$

Beweis: Nach Taylorformel 8.4., für $k = 2$, gilt:

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle (\operatorname{Hess} f)(x + \Theta\xi)\,\xi, \xi \rangle$$

Somit gilt Beh, falls wir

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \langle ((\operatorname{Hess} f)(x) - (\operatorname{Hess} f)(x+\Theta\xi))\,\xi, \xi \rangle$$

setzen.

Dann

$$|\varphi(\xi)| \leq \frac{1}{2} \underbrace{\|(\operatorname{Hess} f)(x) - (\operatorname{Hess} f)(x+\Theta\xi)\|}_{\substack{\to 0 \text{ für } \xi \to 0 \\ \text{da zweimal stetig diffbar}}} \cdot \|\xi\| \cdot \|\xi\|$$

also

$$\frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|^2} \to 0 \quad \text{für } \xi \to 0 \qquad \square$$

8.11. Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell diffbar

und $x \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$

i) Falls $(\operatorname{Hess} f)(x)$ positiv definit,

so hat f ein isoliertes Minimum in x

ii) Falls $(\operatorname{Hess} f)(x)$ negativ definit,

so hat f ein isoliertes Maximum in x

iii) Falls $(\operatorname{Hess} f)(x)$ indefinit,

so hat f kein lokales Extremum in x

[beachte: falls einer oder mehrere der Eigenwerte von $(\operatorname{Hess} f)$ gleich Null sind, so ist keine allgemeine Aussage möglich !]

im Folgenden: $A := (\operatorname{Hess} f)(x)$

Beweis: i) Setze

$$M := \min\{\langle A\eta, \eta\rangle \mid \|\eta\| = 1\} > 0$$

(existiert als Minimum der stetigen Fkt $\eta \mapsto \langle A\eta, \eta\rangle$ auf der kompakten Menge $\{\eta \mid \|\eta\| = 1\}$

Dann, für $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle A\xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2 \cdot \left\langle A\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right), \frac{\xi}{\|\xi\|}\right\rangle \geq M \cdot \|\xi\|^2$$

$$8.9 \Rightarrow f(x+\xi) = f(x) + \frac{1}{2}\underbrace{\langle A\xi, \xi\rangle}_{\geq M \cdot \|\xi\|^2} + \varphi(\xi)$$

da $\frac{|\varphi(\xi)|}{\|\xi\|^2} \to 0$ für $\xi \to 0$

gibt es $\varepsilon > 0$, s.d.

$|\varphi(\xi)| < \frac{1}{2}M \|\xi\|^2$ für $\|\xi\| < \varepsilon$

d.h.

$|\varphi(\xi)| > -\frac{1}{2}M \|\xi\|^2$ — " —

$\Rightarrow f(x+\xi) > f(x) + \frac{1}{2}M\|\xi\|^2 - \frac{1}{2}M\|\xi\|^2 = f(x)$

$\Rightarrow$ x ist isoliertes Minimum

ii) Ersetze f durch $-f$

iii) $\langle A\xi, \xi\rangle = g''(0)$ für $g(t) = f(x+\xi t)$

$\langle A\xi,\xi\rangle > 0 \Rightarrow$ f besitzt auf Geraden $x+\xi t$ in x (d.h. für $t=0$) ein isoliertes Minimum

$\langle A\eta,\eta\rangle < 0 \Rightarrow$ f besitzt auf Geraden $x+\eta t$ in x ein isoliertes Maximum

also

$f(x+t\xi) > f(x)$ für $0 < t < \varepsilon$

$f(x+t\eta) < f(x)$ — " —

□

8.12. Beispiele: Taylorformel erlaubt uns Approx. von f durch quadratische Funktion und deren Verhalten bestimmt über Extrempkte.

i) $f(x,y) = c + x^2 + y^2$

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f = (2x, 2y) = 0$ für $(x,y) = (0,0)$

$\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Hess f positiv definit $\Rightarrow$ isoliertes Minimum bei $(0,0)$

ii) $f(x,y) = c - x^2 - y^2$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ isoliertes Maximum bei $(0,0)$

iii) $f(x,y) = c + x^2 - y^2$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit

$\Rightarrow$ kein Extremum bei $(0,0)$

$\rightsquigarrow$ "Sattelfläche"

(iv) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenwert $= 0$

$\Rightarrow$ keine Aussage möglich

[$f(x,y) = (x-y)^2 \rightsquigarrow$ Mini... bei $(0,0)$ aber kein ...