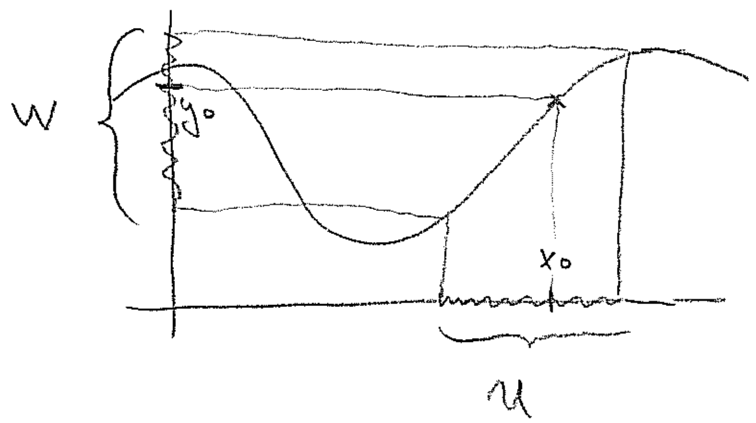
9. Satz von der lokalen Umkehrbarkeit

9.1 Motivation: Eine Fkt

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ist lokal invertierbar bei x_0, falls $f'(x_0) \neq 0$



$f: \mathcal{U} \to W$ bijektiv

$f^{-1}: W \to \mathcal{U}$

Was bedeutet $f'(x_0) \neq 0$ für $Df(x_0) \in L(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f'(x_0) \neq 0 \iff Df(x_0): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto f'(x_0)\, h$$

ist invertierbar

Somit erwarten wir:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ist lokal invertierbar bei x_0, falls die lineare Approximation $Df(x_0)$ invertierbar (d. h. bijektiv) ist

Beachte: eine lin. Abb. $L: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ kann nur invertierbar sein, falls $p = q$

9.2. Satz von der lokalen Invertierbarkeit:

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$f: A \to \mathbb{R}^n$

eine stetig partiell diffbare Fkt. Sei $x_0 \in A$ mit $Df(x_0)$ invertierbar. Dann gibt es offene Mengen $\mathcal{U}, W \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in \mathcal{U} \subset A$, $f(x_0) \in W$ und so dass $f(\mathcal{U}) = W$ und

$f: \mathcal{U} \to W$

hat ein Inverses

$f^{-1}: W \to \mathcal{U}$

f^{-1} ist stetig partiell diffbar und es gilt:

$$Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1} \quad (\text{wobei } x = f^{-1}(y))$$

9.3. Bemerkung: Bzgl der Standardbasis gilt

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

und: $Df(x_0)$ invertierbar $\Leftrightarrow \det(Df(x_0)) \neq 0$

$\det(Df)$ heißt Jacobi-Determinante

Beweis: ① Durch Verschieben mit x_0 und $f(x_0)$ können wir annehmen

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad f(x_0) = 0$$

② Setze $T := Df(x_0)$, $\tilde{f} := T^{-1} \circ f$

T^{-1} linear $\Rightarrow DT^{-1} = T^{-1}$

$$\overset{\text{Ketten}}{\underset{\text{regel}}{\Longrightarrow}} \quad D\tilde{f}(x_0) = \underbrace{DT^{-1}(f(x_0))}_{T^{-1}} \cdot \underbrace{Df(x_0)}_{T} = id$$

Da $f = T \circ \tilde{f} \Rightarrow f^{-1} = \tilde{f}^{-1} \circ T^{-1}$,

reicht es Satz für $\tilde{f}$ zu beweisen.

③ Somit können wir annehmen:

$$x_0 = 0, \quad f(x_0) = 0, \quad Df(0) = id$$

Wir wollen $y = f(x)$ nach x auflösen!

Idee: Schreibe dies als Fixpunktgleichung um und benutze Banachschen Fixpunktsatz

$$y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = y - f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = x + y - f(x) = \underbrace{x - f(x) + y}_{\substack{\text{für kleines } y \\ \text{sollte dies kontraktion sein}}}$$

Betrachte zunächst:

$$g(x) := x - f(x)$$

$$\Rightarrow \quad g(0) = 0$$

$$Dg(0) = 0$$

somit:

$$\|g(x)\| = \|(g_1(x), \dots, g_n(x))\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|g_i(x)|}$$

$$= g_i(0) + \langle \operatorname{grad} g_i(\Theta_i x), x \rangle$$

nach Taylorformel 8.4 für k=
wobei $0 \leq \Theta_i \leq 1$

$$\text{Da} \quad Dg(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} g_1(0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_n(0) \end{pmatrix} = 0$$

und Dg nach Voraus. stetig

$$\Rightarrow \exists\, r > 0 \quad \forall \|x\| \leq r :$$

$$\|\operatorname{grad} g_i(x)\| < \frac{1}{2n} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Sei nun $\|x\| \leq r$

$$\Rightarrow \|g(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\langle \operatorname{grad} g_i(\Theta_i x), x \rangle|}_{\overset{CS}{\leq} \underbrace{\|\operatorname{grad} g_i(\Theta_i x)\|}_{< \frac{1}{2n}} \cdot \underbrace{\|x\|}_{< r}}$$

$$< \frac{r}{2}$$

Somit gilt also:

$$g : \overline{B(0, r)} \to B(0, \tfrac{r}{2})$$

Sei nun $y \in B(0, \frac{r}{2})$ und betrachte

$$g_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto x - f(x) + y$$

Für $x \in \overline{B(0, r)}$ gilt:

$$\|g_y(x)\| = \|y + g(x)\|$$

$$\leq \underbrace{\|y\|}_{< \frac{r}{2}} + \underbrace{\|g(x)\|}_{< \frac{r}{2}}$$

$$< r$$

d.h.

$$g_y : \overline{B(0, r)} \to B(0, r)$$

und für $x_1, x_2 \in \overline{B(0,r)}$ gilt:

$$\| g_y(x_1) - g_y(x_2) \| = \| g(x_1) - g(x_2) \|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\| g_i(x_1) - g_i(x_2) \|}$$

$$= \langle \operatorname{grad} g_i(a_i), x_2 - x_1 \rangle$$

wobei a_i auf der Strecke zwischen x_1 und x_2 liegt, also insbesondere

$$a_i \in \overline{B(0,r)}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\| \operatorname{grad} g_i(a_i) \|}_{< \frac{1}{2n}} \cdot \| x_2 - x_1 \|$$

da $\| a_i \| \leq r$

$$< \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \|$$

$\Rightarrow$ g_y ist eine Kontraktion auf $\overline{B(0,r)}$

vollständiger metrischer Raum

Banachscher $\Longrightarrow$ Fixpktsatz 2.7.

$\exists$ eindeutigen Fixpkt $x \in \overline{B(0,r)}$ mit

$$g_y(x) = x, \text{ d.h.}$$

$$x - f(x) + y = x$$

d.h. $y = f(x)$

Somit ist f^{-1} eindeutig bestimmt auf

$$f^{-1} : B(0, \tfrac{r}{2}) \longrightarrow B(0,r)$$

Setze $W = B(0,\frac{r}{2})$, $U = f^{-1}(B(0,\frac{r}{2}))$

(4) f^{-1} ist stetig

Betrachte $x_1, x_2 \in B(0,r)$:

$$\|x_1 - x_2\| = \|g(x_1) + f(x_1) - (g(x_2) + f(x_2))\|$$

$$\leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \underbrace{\|g(x_1) - g(x_2)\|}_{< \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|}$$

$$\Rightarrow \|x_1 - x_2\| \leq 2\,\|f(x_1) - f(x_2)\|$$

also, für $y_1, y_2 \in B(0,\frac{r}{2})$: $x_i := f^{-1}(y_i) \in B(0,r$

$$\Rightarrow \|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\,\|y_1 - y_2\|$$

$\Rightarrow f^{-1}$ stetig

(5) Beweis, dass f^{-1} diffbar, ist ähnlich (wobei r eventuell verkleinert werden muss, damit $[Df(x)]^{-1}$ $\forall x \in B(0,\frac{r}{2})$ existiert)

beachte: Formel für Df^{-1} folgt aus Kettenregel

$$id = D\,id = D(f^{-1} \circ f) = Df^{-1} \cdot Df$$

9.4. Beispiel: Polarkoordinaten

$$p: (0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r, \varphi) \longmapsto (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow\ Dp(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial r} & \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial p_2}{\partial r} & \frac{\partial p_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \det Dp(r,\varphi) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

also lokal invertierbar, d.h. r, φ kann durch x, y ausgedrückt werden (außer bei $(0,0)$, welches nicht im Bild von p liegt!)