UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 0
zur mündlichen Bearbeitung in der ersten Übungswoche
Die Aufgaben werden nicht bewertet.

Aufgabe 1. Wiederholen Sie, dass der Raum der stetigen Funktionen

$$\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

mit der Supremumsnorm ein normierter Vektorraum ist. Zeigen Sie, dass sich einige der Gesetze über Folgen reeller Zahlen einfach auf den Raum $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|)$ übertragen lassen: Seien dafür $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei (bzgl der Supremumsnorm) konvergente Folgen von Funktionen in $\mathcal{C}[0,1]$ mit Grenzwerten f bzw. g in $\mathcal{C}[0,1]$.

(a) Zeigen Sie, dass auch die Folge $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und geben Sie deren Grenzwert an.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, das heißt es gibt ein $K > 0$, so dass $\|f_n\| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass auch die Folge $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und geben Sie deren Grenzwert an.

Die Aussagen (a) und (b) gelten für *alle* normierten Vektorräume.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum die Menge aller offenen Mengen gleich der Menge ist, die aus beliebigen Vereinigungen offener Kugeln besteht, d.h.

$$\{\text{offene Mengen}\} = \{\text{beliebige Vereinigungen offener Kugeln}\}$$

bitte wenden

Aufgabe 3. Der Begriff der Konvergenz wurde in der Vorlesung für metrische Räume definiert. Es genügt jedoch der 'schwächere Kontext' eines topologischen Raumes, um sinnvoll von konvergenten Folgen sprechen zu können.

Definieren Sie, wann in einem topologischen Raum M eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent genannt wird.

Anmerkung: Jeder metrische Raum M kann auch als topologischer Raum aufgefasst werden (mit der durch die Metrik induzierten Topologie). In diesem Fall soll natürlich die neue Definition mit der alten Definition (Vorlesung) konsistent sein, d.h. zeigen Sie für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M

$$\left(\begin{array}{c} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } M \\ (M \text{ als metrischer Raum}) \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } M \\ (M \text{ als topologischer Raum}) \end{array}\right)$$

Aufgabe 4. Die triviale Topologie auf einer Menge $M \neq \emptyset$ ist diejenige mit der geringsten Anzahl an offenen Mengen.

(a) Geben Sie explizit die Teilmengen von M an, die in der trivialen Topologie offen sind.

(b) Betrachten Sie eine beliebige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M und diskutieren Sie ihr Konvergenzverhalten: In welchen Fällen divergiert die Folge? In welchen Fällen konvergiert die Folge? Welche Besonderheit ist im Falle von Konvergenz bezüglich 'des Grenzwertes' festzustellen?