UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 1
Abgabe: Donnerstag, 28.4.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Betrachten Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \sqrt[n]{x}, \quad \text{für } x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert und berechnen Sie diese.

(b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass $\rho(x,y) := |e^x - e^y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ und für jedes $0 \leq C < 1$ die Differentialgleichung

$$f'(x) = \sin(f(x))$$

genau eine stetig differenzierbare Lösung $f : [0,C] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = a$ besitzt.

bitte wenden

Aufgabe 4 (20 Punkte)**.** Sei V ein K-Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf V heißen *äquivalent*, falls $b, c > 0$ existieren mit

$$b\|x\| \leq \|x\|' \leq c\|x\| \qquad \text{für alle } x \in V$$

Analog heißen zwei Metriken d und d' auf einer Menge M *äquivalent*, falls $b, c > 0$ existieren mit

$$b \cdot d(x, y) \leq d'(x, y) \leq c \cdot d(x, y) \qquad \text{für alle } x, y \in M$$

(a) Zeigen Sie

  (i) Sind die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent, so sind auch die davon induzierten Metriken d und d' äquivalent.

  (ii) Zeigen Sie: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V ist genau dann bezüglich $\|\cdot\|$ gegen $x \in V$ konvergiert, wenn sie bezüglich $\|\cdot\|'$ gegen $x \in V$ konvergiert.

  (iii) Zeigen Sie: Eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M ist genau dann bezüglich $d(\cdot, \cdot)$ gegen $y \in M$ konvergiert, wenn sie bezüglich $d'(\cdot, \cdot)$ gegen $y \in M$ konvergiert.

(b) Betrachten Sie folgende drei Normen auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \qquad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende Aussage:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Die Normen $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_1$ sind also äquivalent. Insbesondere konvergiert eine Folge in $\mathbb{R}^n$ genau dann bzgl. einer dieser drei Normen, wenn sie komponentenweise konvergiert. Man kann sogar zeigen, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind (was im Wesentlichen daran liegt, dass $\mathbb{R}^n$ endliche Dimension hat).