UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 2
Abgabe: Mittwoch, 04.05.2016, **17:00 Uhr**
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass jeder Vektorraum V mit einem Skalarprodukt die *Parallelogrammidentität* erfüllt (wobei $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$):

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \text{für } x, y \in V$$

(b) Benutzen Sie (a), um zu zeigen, dass die Supremumsnorm auf $\mathcal{C}[0,1]$ nicht von einem Skalarprodukt kommt, d. h. die Supremumsnorm kann nicht als $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ geschrieben werden.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ offen sind bzgl. der euklidischen Metrik.

(a) $\{(x,y) \mid -1 < x < 1 \text{ und } -1 < y < 1\}$

(b) $\{(x,y) \mid x > y\}$

(c) $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x,y) \mid \max(|x|,|y|) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ abgeschlossen sind bzgl. der von der Supremumsnorm induzierten Metrik.

(a) $\{f \mid f(t_0) = \alpha\}$ wobei $t_0 \in [0,1]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ fest sind.

(b) $\{f \mid \alpha \leq f(t) \leq \beta \text{ für alle } t \in [0,1]\}$ wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ feste Zahlen sind.

(c) $\{f \mid f \text{ hat eine Nullstelle}\}$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei X ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(a) Sei X vollständig. Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn A vollständig ist.

(b) Sei X kompakt. Zeigen Sie, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn A kompakt ist.

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ eines metrischen Raumes X einen nichtleeren, kompakten Durchschnitt hat.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** In der Vorlesung wurde ein normierter Raum als ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem Vektorraum V und einer hierauf definierten Norm $\|\cdot\|$ definiert. Ist ein normierter Raum (bezüglich dieser Norm) *vollständig* so wird er als *Banachraum* bezeichnet.

Zeigen Sie, dass der Raum

$$E = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert}\} \qquad \text{mit} \qquad \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

ein Banachraum ist. (Zeigen Sie also auch, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist, dh. dass E ein normierter Raum ist.)

Aufgrund von Feiertagen wird es im Mai zu einigen Abweichungen vom üblichen Vorlesungs- und Übungsbetrieb kommen:

- Die Vorlesung entfällt an den 3 Feiertagen
  - Donnerstag, 05. Mai (Christi Himelfahrt)
  - Montag, 16. Mai (Pfingstmontag)
  - Donnerstag, 26. Mai (Fronleichnam).
- Die Donnerstagsübungen vom 05. Mai werden durch eine Saalübung einen Tag später, Freitag, 06. Mai ersetzt. Sie wird von Felix Leid gehalten und findet von 12-14 Uhr im Hörsaal III statt.
- In den zwei Wochen vom 16. - 27. Mai findet nur jeweils eine Übung (Besprechung Blatt 3) statt und es gibt nur ein neues Übungsblatt (Blatt 4) für beide Wochen:

16.05.	17.05.	18.05.	19.05.	20.05.	23.05.	24.05.	25.05.	26.05.	27.05.
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Mo	Di	Mi	Do	Fr
Feiertag (Pfingstmontag) Ausfall		Besprechung Blatt 3	Besprechung Blatt 3		Besprechung Blatt 3		Ausfall Abgabe Blatt 4	Feiertag (Fronleichnam) Ausfall	