UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 3
Abgabe: Donnerstag, 12.5.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Wir setzen

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Zeigen Sie:

(a) $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$.

(b) $d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{A}$

(c) Sei A folgenkompakt, B abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann $d(A, B) > 0$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle kompakten Teilmengen des metrischen Raumes $(\mathbb{Z}, d)$ der ganzen Zahlen, versehen mit der diskreten Metrik d. Zur Erinnerung: In der Vorlesung wurde d definiert als

$$d(x, y) := 1 - \delta_{x,y} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } x = y \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Die *Cantormenge* $C \subset [0, 1]$ ist wie folgt definiert:
Sei $C_0 := [0, 1]$, $\quad C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $\quad C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \ldots$
Die Menge C_{n+1} entsteht hierbei aus C_n durch Entfernen des mittleren offenen Drittels jedes Intervalls aus C_n, d.h.

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} [a_i, b_i] \quad \Rightarrow \quad C_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{2^n} \left[a_i, a_i + \frac{1}{3}(b_i - a_i)\right] \cup \left[b_i - \frac{1}{3}(b_i - a_i), b_i\right]$$

wobei gelten soll $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < a_{2^n} < b_{2^n}$. Setze $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Begründen Sie, warum C kompakt ist und zeigen Sie, dass C überabzählbar ist. Zeigen Sie außerdem, dass das *Innere* C° von C leer ist. (Hierbei ist das Innere einer Menge A definiert als die Vereinigung aller offenen Mengen $U \subset A$.)

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass *alle* Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind (siehe auch Blatt 1, Aufgabe 4). Gehen Sie dabei wie folgt vor: Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $c > 0$ gibt, so dass $\|x\| \leq c\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(Schreiben Sie dafür $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, wobei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der i-te kanonische Einheitsvektor ist und nutzen Sie die Ergebnisse von Blatt 1 Aufgabe 4.)

(b) Zeigen Sie, dass $A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $b > 0$ gibt, so dass $b\|x\|_2 \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(Zeigen Sie, dass das Bild von A unter der Funktion $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ein Minimum besitzt.)

(d) Folgern Sie, dass zwei beliebige Normen äquivalent sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum, auf dem alle Normen äquivalent sind und $\|\cdot\|$ eine mögliche Norm auf V. Sei $B \subseteq (V, \|\cdot\|)$ beschränkt, $A \subseteq (V, \|\cdot\|)$ abgeschlossen und $K \subseteq (V, \|\cdot\|)$ kompakt. Zeigen Sie für eine beliebige Norm $\|\cdot\|'$ auf V:

(i) $B \subseteq (V, \|\cdot\|')$ beschränkt.

(ii) $A \subseteq (V, \|\cdot\|')$ abgeschlossen.

(iii) $K \subseteq (V, \|\cdot\|')$ kompakt.

Beschränktheit, Abgeschlossenheit und Kompakteit sind in diesem Fall also keine Frage der gewählten Norm. (Diese Aussage gilt nach Aufgabe 4 folglich auch für den Fall $V = \mathbb{R}^n$.)