UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 5
Abgabe: Donnerstag, 02.06.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\gamma : [1, a] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve, definiert durch $\gamma(t) := (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$. Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie ihre Länge.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zwei Ameisen krabbeln eine Dose mit Radius 5cm hoch. Dabei nimmt die erste einen direkten, senkrechten Weg entlang einer Seite (im Lot), die andere krabbelt in einer gleichmäßigen Schraube einmal um die Dose herum. Beide Ameisen beginnen am gleichen Punkt und enden am gleichen und benötigen die selbe Zeit.
Wie hoch muss die Dose sein, damit die zweite Ameise einen genau doppelt so langen Weg zurücklegt wie die erste?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Spirale $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $\gamma(t) := (t \sin(\frac{1}{t}\pi), t \cos(\frac{1}{t}\pi))$ für $t \in (0, 1]$ und $\gamma(0) := (0, 0)$ *nicht* rektifizierbar ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $a > 0$. Geben Sie für die durch $y = \cosh x$ und $0 \leq x \leq a$ gegebene Kurve eine Darstellung mit der Bogenlänge als Parameter (also die "natürliche Parametrisierung" mit konstanter Geschwindigkeit 1).

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

(a) Seien $a \leq b \in \mathbb{R}$ und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine (parametrisierte) Kurve in $\mathbb{R}^n$. Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei beliebige Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

   (i) Die Kurve γ ist als Kurve in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ genau dann stetig diff'bar, wenn sie als Kurve in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ stetig diff'bar ist.

   (ii) Die Kurve γ ist als Kurve in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ genau dann rektifizierbar, wenn sie als Kurve in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ rektifizierbar ist.

(b) Betrachten Sie die beiden Kurven

$$\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (t, t) \qquad \gamma_2 : [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (0, t)$$

Vergleichen Sie jeweils deren Längen bezüglich der 1-Norm $\|\cdot\|_1$, der 2-Norm $\|\cdot\|_2$ und der ∞-Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$.