UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2016

Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 09.06.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) := (\sin(xy), \cos(y))$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Funktionalmatrix $Df(x, y)$.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $(1, -2)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = (1, x, x^2), \quad g(y_1, y_2, y_3) = (\sin y_1 - \cos y_2, e^{y_3}), \quad h(z_1, z_2) = z_1 z_2$$

Berechnen Sie die Ableitung von $h \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einmal mit Hilfe der Kettenregel sowie ein zweites Mal durch direktes Ableiten.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in U$ differenzierbare Funktionen. Mit f' und g' seien die Ableitungen Df und Dg bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und es gilt $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(b) fg ist in x_0 differenzierbar und es gilt $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.

(c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

(b) Besitzt f überall stetige partielle Ableitungen?

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Analog zur Definition von partieller Differenzierbarkeit heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ *stetig in jeder Komponente*, wenn für jedes $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$ und alle $1 \leq i \leq n$ die Funktion

$$g_i(t) := f(x + te_i) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

stetig in $t = 0$ ist ($e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ i-ter Einheitsvektor).

(a) Argumentieren Sie, warum aus partieller Differenzierbarkeit die Stetigkeit in jeder Komponente folgt, aber die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist.

(b) Betrachten Sie nun die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (i) Zeigen Sie, dass f stetig in jeder Komponente, aber nicht stetig ist.

   (ii) Zeigen Sie, dass f partiell diff'bar, aber nicht (total) diff'bar ist.

Bemerkung: Aufgabe 4 und 5 zeigen also, dass die Implikationen

$$\begin{array}{c} \text{stetige partielle Differenzierbarkeit} \\ \Downarrow \\ \text{(totale) Differenzierbarkeit} \\ \Downarrow \\ \text{partielle Differenzierbarkeit} \\ \Downarrow \\ \text{Stetigkeit in jeder Komponente} \\ \Uparrow \\ \text{Stetigkeit} \end{array}$$

aus Korollar 6.9 nicht umkehrbar sind, also echte Impilaktionen und keine Äquivalenzen darstellen.