UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 7
Abgabe: Donnerstag, 16.06.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}(0,0)$$

gilt. Ist f stetig in $(0,0)$?

Aufgabe 2 (10 Punkte). Geben Sie den nullten, den ersten und den zweiten Term der Taylorentwicklung von $f(x,y) = e^{x^2+y}$ um den Punkt $(0,0)$ an.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) := (4x^2y^2)\exp(-x^2-4y^2)$. Liegt im Ursprung ein isoliertes Minimum vor?

Aufgabe 4 (10 Punkte). Die Wirkung $W(x,t)$, die x Einheiten eines Medikaments t Stunden nach der Einnahme auf einen Patienten haben, wird in vielen Fällen durch $W(x,t) = x^2(a-x)t^2e^{-t}$ dargestellt, wobei $a > 0$, $0 \leq x \leq a$ und $t \geq 0$. Bestimmen Sie Dosis x und Zeit t so, dass die Wirkung $W(x,t)$ maximal ist.

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = (1+z)e^{x-y}$. Für welche der foglenden $\xi \in \mathbb{R}^3$ verschwindet die Richtungsableitung von f im Punkt $(0,0,0)$?

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $n \geq 2$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Paare diametraler Punkte $x, -x$ gibt mit $f(x) = f(-x)$.
(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\varphi(x) := f(x) - f(-x)$ und wenden Sie den Zwischenwertsatz an.)