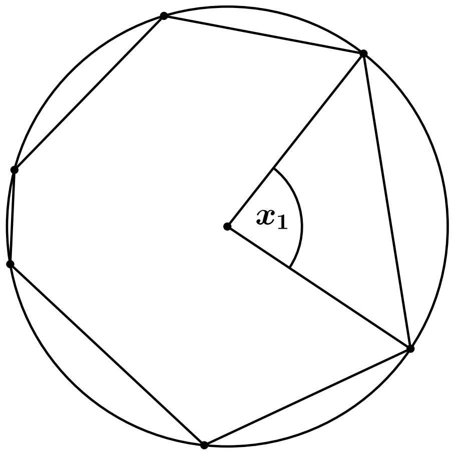
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 8
Abgabe: Donnerstag, 23.06.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie das dem Einheitskreis einbeschriebene n-Eck ($n \geq 3$) mit dem größten Flächeninhalt. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(a) Erläutern Sie, warum die Funktion $F_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_n(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sin x_i$ den Flächeninhalt des durch die Winkel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 2\pi$ (und $0 \leq x_i \leq 2\pi$) bestimmten n-Ecks beschreibt. (Hierbei sei x_i der Winkel zwischen den Strahlen, die vom Mittelpunkt des Einheitskreises durch den i-ten bzw. den $(i+1)$-ten Eckpunkt gehen.)



(b) Bestimmen Sie eine mögliche Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ für das Maximum der Funktion F_n unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_i = 2\pi$ mit Hilfe des Lagrange-Multiplikators.

(c) Warum ist F_n an der Stelle x aus (b) wirklich maximal? Begründen Sie, für welches $x \in \mathbb{R}^n$ der Flächeninhalt des n-Ecks maximal ist und geben Sie eine geometrische Deutung Ihres Ergebnisses an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Seien a, p, q, r positive, reelle Zahlen. Bestimmen Sie eine Zerlegung von a in drei Summanden $x, y, z > 0$, sodass der Ausdruck $x^p y^q z^r$ maximal ist. Bestimmen Sie dazu das lokale Extremum der Funktion $\ln(x^p y^q z^r)$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = a$ mit Hilfe des Lagrange-Multiplikators.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob durch die Gleichungen

$$(a) \qquad \begin{aligned} x + y - \sin z &= 0 \\ e^x - x - y^3 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad (b) \qquad \begin{aligned} x + y - \sin z &= 0 \\ e^z - x - y^3 &= 1 \end{aligned}$$

in einem Umgebung von $x = 0$ zwei Funktionen $y(x), z(x)$ mit $y(0) = z(0) = 0$ definiert werden.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Wir identifizieren den Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ der reellen $n \times n$-Matrizen mit $\mathbb{R}^{n^2}$ und betrachten die differenzierbare Abbildung $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, gegeben durch $f(A) = A^2$ (Matrizenmultiplikation). Sei $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ die lineare Abbildung, die der Funktionalmatrix $Df(A)$ im Punkt A entspricht.
Zeigen Sie, dass $L(B) = AB + BA$ ist, für $B \in M_n(\mathbb{R})$. Folgern Sie, dass f in einer Umgebung U der Einheitsmatrix E_n umkehrbar ist, dh. für jede Matrix $A \in U$ existiert eine Matrix $\sqrt{A}$ mit $(\sqrt{A})^2 = A$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grad* α $(\alpha > 0)$, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ gilt: $f(tx) = t^\alpha f(x)$.
Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann homogen vom Grad α ist, wenn $\langle \mathrm{grad} f(x), x \rangle = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.