UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 9
Abgabe: Donnerstag, 30.06.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^x t^n e^{-t} \mathrm{d}t$$

durch Differenzieren des parameterabhängigen Integrals

$$F(y) := \int_0^x e^{-ty} \mathrm{d}t$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige differenzierbare Abbildung mit beschränktem Differential, d.h. es gebe eine Konstante $K \in [0, \infty)$, sodass

$$\|Df(x)\| \leq K \qquad \forall x \in U.$$

Zeigen Sie, dass f in U gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to R$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $f(x) = c$.
Zeigen Sie, dass der Gradient $\mathrm{grad} f(x)$ auf der Niveaufläche

$$N_f(c) = \{z \in U | f(z) = c\}$$

senkreht steht, d.h. dass folgendes gilt: Ist

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \quad (\varepsilon > 0)$$

eine beliebige stetig differenzierbare Kurve mit

$$\varphi(0) = x \text{ und } \varphi((-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq N_f(c),$$

so folgt

$$\langle \dot{\varphi}(0), \mathrm{grad} f(x) \rangle = 0.$$

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass f, eingeschränkt auf eine beliebige Gerade g durch den Ursprung, im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ ein lokales Minimum hat (d.h. betrachten Sie für $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ die Gerade $g(t) := tx \quad (t \in \mathbb{R})$ und die Funktion $h(t) := (f \circ g)(t)$).

(b) Folgern oder widerlegen Sie, dass f in $(x, y) = (0, 0)$ ein lokales Minimum hat.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie den Typ des folgenden Differentialgleichungssystems und diskutieren Sie es hinsichtlich Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung. Was können Sie über eine explizite Lösung und ihren maximalen Definitionsbereich sagen?

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + u_2 \\ u_2' &= u_2 \end{aligned} \qquad\qquad u(0) = (1, 1)$$