**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

# Übungen zur Vorlesung Analysis II

Sommersemester 2016

## Blatt 10

**Abgabe:** Donnerstag, 07.07.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

---

**Aufgabe 1** (20 Punkte)**.**

**Erinnerung** (Jordansche Normalform für quadratische Matrizen über $\mathbb{C}$):
Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist äquivalent zu einer Matrix $J$ in Jordanscher Normalform, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $Q$, sodass $QAQ^{-1} =: J$ eine Matrix mit Blöcken $J_i = \lambda_i \cdot E_i + N_i$ auf der Diagonalen ist:

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

Hierbei sind $E_i$ Einheitsmatrizen geeigneter Größe, $\lambda_i$ Eigenwerte der Matrix $A$ und $N_i$ habe Einsen auf der oberen Nebendiagonalen und sonst nur Nullen:

$$J_i = \lambda_i \cdot E_i + N_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass für Matrizen $A$ und $B$ mit $AB = BA$ schon $e^{A+B} = e^A e^B$ gilt. Ist die Bedingung $AB = BA$ notwendig (Gegenbeispiel oder Beweis für allgemeinen Fall)?

(b) Sei $J$ eine Matrix in Jordanscher Normalform wie oben beschrieben. Berechnen Sie $e^J$ (Tipp: zunächst $e^{J_i}$).

(c) Sei $A$ eine beliebige $n \times n$-Matrix, äquivalent zur Matrix $J$ aus Aufgabenteil (b), d.h. $QAQ^{-1} = J$ für geeignetes $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Bestimmen Sie $e^A$.

*bitte wenden*

**Aufgabe 2** (10 Punkte)**.** Das Lösen eines DGL-Systems mit Hilfe der Iteration $u \mapsto Tu$ gemäß Satz 11.4 aus der Vorlesung bezeichnet man als Picard-Iteration.
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)cos(t) \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie ein möglichst großes Intervall $[0, b]$, auf dem a priori laut Satz 11.4 die Konvergenz des Verfahrens garantiert ist.

(b) Bestimmen Sie per Picard-Iteration eine Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems und geben Sie einen größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ an, auf dem $u(t)$ das Anfangswertproblem löst.

**Aufgabe 3** (20 Punkte)**.** Sei $D := [0, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und

$$f : D \to \mathbb{R}; \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 2x & , x \neq 0, -1 \leq y \leq 0 \\ 2x - \frac{4y}{x} & , x \neq 0, 0 < y \leq x^2 \\ -2x & , x \neq 0, x^2 < y \leq 1 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f$ stetig, aber nicht Lipschitz-stetig auf D ist.

(b) Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = 0, \qquad t \in [0, 1]$$

und weisen Sie nach, dass die Picard-Iteration nicht konvergiert.

(c) Zeigen Sie, das das Anfangswertproblem dennoch lösbar ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung sogar eindeutig ist. Sie können dabei wie folgt vorgehen:

(i) Zeigen Sie zunächst, dass eine Lösung immer $0 < u(t) \leq t^2$ für alle $t \in (0, 1]$ erfüllt.

(ii) Betrachten Sie dann für zwei Lösungen $\tilde{u}$ und $u$ die Differenz $v := \tilde{u} - u$. Welche DGL erfüllt $v$?

(iii) Zeigen Sie, dass $v_c(t) = \frac{c}{t^4}$ mit $c \in \mathbb{R}$ die einzigen Lösungen dieser DGL auf $(0, 1]$ sind. Tipp: Untersuchen Sie für eine beliebige Lösung $\tilde{v}$ den Quotienten $\frac{\tilde{v}}{v_c}$ für geeignetes $c$.